Л. И. МАНДЕЛЬШТАМ
ЛЕКЦИИ ПО КОЛЕБАНИЯМ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Л. И. МАНДЕЛЬШТАМ

ЛЕКЦИИ ПО КОЛЕБАНИЯМ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Л. И. МАНДЕЛЬШТАМ

ЛЕКЦИИ ПО КОЛЕБАНИЯМ

(1930–1932 гг.)

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
АКАДЕМИКА
М. А. ЛЕОНТОВИЧА

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА · 1955

Комиссия по изданию трудов

Л. И. МАНДЕЛЬШТАМА:

академик *М. А. Леонтович*,

академик *А. А. Андронов*,

академик *Г. С. Ландсберг*, академик *И. Е. Тамм*

СОДЕРЖАНИЕ

От редактора 9

Часть первая.

Колебания сосредоточенных систем

Первая лекция. Для теории колебаний характерно рассмотрение не состояния в данный момент, а процесса в целом. Общие закономерности теории колебаний. Теория колебаний и волновая механика. Содружество математики, физики и техники в теории колебаний . . 11

Вторая лекция. Периодическая функция. Синусоидальная функция. Амплитуда, частота, циклическая частота, фаза. Диапазон частот, встречающихся в природе. Среднее, среднее квадратичное, эффективное значение. Сложение синусоидальных колебаний. Суперпозиция; неудачность термина „интерференция"; неаддитивность энергий. Сложение колебаний со случайными фазами; необходимость статистического постулата; аддитивность энергий в среднем; когерентные и некогерентные колебания 16

Третья лекция. Задача об апроксимации функций тригонометрическими полиномами. Теорема Фурье. Исторические замечания о понятии функции. Класс функций, разложимых в ряд Фурье. Метод комплексных величин; когда можно и когда нельзя его применять . 26

Четвертая лекция. Ряды Фурье (продолжение); явление Гиббса. Биения. Как мы узнаем направление на источник звука. „Гармоническое колебание с медленно меняющейся амплитудой и фазой". Критерий медленности определяется конкретной физической задачей. Кажущееся нарушение закона сохранения энергии при интерференции 35

Пятая лекция. Почти-периодические функции. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний одинакового периода. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний, имеющих различные периоды. Соизмеримость и несоизмеримость периодов. Радиоприем „посредством биений". Роль нелинейности. Детекторы. Выпрямление. Образование разностного тона. Некоторые методы экспериментального исследования колебаний 45

Шестая лекция. Теория колебаний маятника, данная Галилеем. Теория колебаний маятника, основанная на законе сохранения энергии. Роль маятника в истории физики. Гармонические колебания механических систем, в которых сила определяется упругими деформациями. Колебания в контуре, обладающем емкостью и индуктивностью. Общие замечания о колебаниях около устойчивого положения равновесия. Кажущееся однообразие электрических колебательных систем. 56

Седьмая лекция. Примеры механических колебательных систем. Вал с двумя дисками и его электрическая модель. Осторожность, необходимая при идеализациях. Пример Бореля. „Неестественные" начальные условия в случае груза, висящего на пружине. Электрическая аналогия этого случая. Качественное исследование движений нелинейной консервативной системы с одной степенью свободы с помощью интеграла энергии: неограниченное одностороннее движение, либрационное движение, лимитационное движение. Применение общей теории к гармоническому осциллатору и к маятнику 66

Восьмая лекция. Иллюстрации к качественной теории Вейерштрасса. Наглядное представление и математическая теория. Представление движения на фазовой плоскости. Особые точки и замкнутые интегральные кривые нелинейного дифференциального уравнения. 79

Девятая лекция. Изображение движения на фазовой плоскости (продолжение). Особые точки и замкнутые кривые. Фазовая картина некоторых консервативных систем. Теорема вириала и ее применение к кинетической теории газов 88

Десятая лекция. Применения теоремы вириала (продолжение). Пример Богуславского. Идеальный газ. Твердое тело. Статистический постулат Больцмана. Вычисление средней энергии осциллятора. Классическая теория теплоемкости твердого тела; ее неудовлетворительность. Равновесное излучение. Вопрос о распределении энергии в его спектре. Классическая теория; ее неудовлетворительность. Статистический постулат Планка; квантование энергии осциллятора. 100

Одиннадцатая лекция. Вычисление средней энергии квантованного осциллятора. Квантовые формулы для спектральной плотности равновесного излучения и для энергии твердого тела. Понятие адиабатического инварианта. Адиабатическая инвариантность отношения средней кинетической энергии к частоте (на примерах) 110

Двенадцатая лекция. Адиабатические инварианты (окончание): квантование осциллятора по Планку и теория адиабатических инвариантов; гипотеза Эренфеста. Квантование осциллятора в волновой механике. Колебательные системы с одной степенью свободы с учетом трения (сопротивления). Отрицательное сопротивление и второй закон термодинамики. Коэффициент полезного действия процесса зарядки конденсатора аккумуляторной батареей. Затухающие колебания: коэффициент затухания; логарифмический декремент. Маятник Фроуда 119

Тринадцатая лекция. Затухающие и нарастающие колебания в линейной системе. Маятник Фроуда (продолжение). Ламповый генератор. Невозможность незатухающих колебаний в линейной неконсервативной системе. Нелинейная задача о системе с постоянным трением. Разрывная идеализация характеристики электронной лампы 131

Четырнадцатая лекция. Идеализированный ламповый генератор. Периодическое движение. Его устойчивость. Процесс установления колебаний. Предел применимости идеализации. Изменение мощности генератора при параллельном включении нескольких ламп. Коэффициент полезного действия генератора. Линейная система с одной степенью свободы; случай, когда движения апериодичны. Действие внешней периодической силы на линейную систему с одной степенью свободы; предварительное понятие о резонансе 144

Пятнадцатая лекция. Действие внешней синусоидальной силы на линейную систему с одной степенью свободы. Установившиеся колебания. Энергетические соотношения. Резонанс для заряда (смещения) и для тока (скорости). Резонансные кривые. Измерение декремента. Фазовые соотношения. Измерение декремента с помощью электродинамометра 155

Шестнадцатая лекция. Резонанс в технике. Резонанс в оптике; фазовые соотношения. Неустановившийся режим; нарастание колебаний в затухающем осциллаторе. Резонанс в незатухающем осцилляторе. Мнимое опровержение теории относительности. Сила, состоящая из ряда синусоидальных составляющих. Физическое значение разложения Фурье. Противоречие между требованиями селективности и правильного воспроизведения модуляции. Ошибочная точка зрения Флеминга в вопросе о реальности боковых полос 166

Семнадцатая лекция. Действие помех на линейную колебательную систему с одной степенью свободы. Увеличение отношения сигнал/помеха при уменьшении затухания 177

Восемнадцатая лекция. Уравнение колебаний маятника с горизонтально и вертикально колеблющейся точкой подвеса. Контур с периодически меняющейся емкостью. Теория линейного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами 181

Девятнадцатая лекция. Примеры систем с периодически меняющимся параметром. Параметрический резонанс; его отличие от „обычного“ резонанса. Физическое объяснение простейшего случая параметрического резонанса. Частотная модуляция. Ошибочное мнение о возможности сузить интервал частот, нужный для радиопередачи, посредством перехода к частотной модуляции. Асимптотическое решение для медленного изменения частоты и его разложение на синусоидальные составляющие. Как правильно записать „синусоидальное колебание с переменной частотой“. Когда имеет смысл говорить о „синусоидальном колебании с переменной частотой“ . . . 189

Двадцатая лекция. Интеграл Фурье. Разложение в интеграл Фурье отрезка синусоиды. Несовместимость монохроматичности и концентрированности сигнала. Аналогия с соотношением неопределенностей в волновой механике. Рассмотрение действия произвольной внешней силы на гармонический осциллатор без разложения в спектр 200

Двадцать первая лекция. Реальность синусообразных слагаемых в интеграле Фурье. Применения гармонических резонаторов в регистрирующих приборах. „Молоточек“ Н. Н. Андреева. Ток в ускоренно движущемся электрическом контуре; инерция электронов. Аналогии в вопросах колебаний 213

Двадцать вторая лекция. Понятие о связях в механике. Связи голономные, неголономные и полуголономные. Полуголономные связи в электрических системах. Уравнения Лагранжа — Максвелла. Условие устойчивости Дирихле. Кинетическая и потенциальная энергия как квадратичные формы. Относительность рода связи 223

Двадцать третья лекция. Математическая теория линейной консервативной системы с двумя степенями свободы. Нормальные колебания. Секулярное уравнение. Связь между парциальными и нормальными частотами. Нормальные координаты. Общее решение как суперпозиция нормальных колебаний 234

Двадцать четвертая лекция. Циклические координаты. Решение уравнений для линейной системы с двумя степенями свободы (без трения). Нормальные колебания; их частоты и распределения. Нормальные координаты. Нормальные частоты, как экстремумы отношения двух квадратичных форм. Разделение системы на парциальные системы 241

Двадцать пятая лекция. Случай вырождения — случай двух одинаковых нормальных частот. Еще раз о парциальных системах и парциальных частотах. Задача о взаимодействии парциальных систем. Слабая и сильная связь; слабая и сильная „связанность“. Нормаль-

ные колебания и перекачка энергии в случае слабой и сильной „связанности". Парадокс, связанный с полной перекачкой энергии при сколь-угодно слабой связи 250

Двадцать шестая лекция. Примеры, где существенное значение имеет распределение нормальных колебаний. Когда можно приближенно рассматривать связанные колебания как вынужденные. Приближенное вычисление изменения нормальной частоты при малом изменении параметра. Вырожденный случай. Эффект слабой связи в теории возмущений. Вынужденные колебания в системе с двумя степенями свободы. Теорема взаимности. Резонанс. Успокоение . . 260

Двадцать седьмая лекция. Механические успокоители и электрические „пробки". Отсутствие резонанса при совпадении частоты внешней силы с одной из нормальных частот в случае внешней силы, ортогональной к нормальному колебанию. Линейная система с двумя степенями свободы при наличии трения. Метод, позволяющий находить интегральные эффекты, не решая дифференциального уравнения. 269

Двадцать восьмая лекция. Затухающие колебания системы с двумя степенями свободы. Оптические применения теории связанных колебаний. Примеры систем с бо́льшим числом степеней свободы. Самовозбуждение систем с произвольным числом степеней свободы; условия Раута-Гурвица. Случай кратных корней; ошибка Лагранжа 279

Двадцать девятая лекция. Системы со многими степенями свободы; кратные корни (повторение). Использование симметрии для отыскания формы и частоты колебаний. Введение в теорию кристаллических решеток. Квантовая теория теплоемкости кристаллов. Работа Эйнштейна. Приближенный прием Дебая. Решение дискретной задачи Борном и Карманом. Одномерная модель кристалла, состоящего из двух сортов атомов. Дебаевский и борновский спектры. 289

Тридцатая лекция. Одномерная модель кристалла, состоящего из двух сортов атомов (продолжение). Подробное исследование типов колебаний и строения спектра. Акустические и внутримолекулярные колебания. Принципиальное отличие от теории, не учитывающей атомистическую структуру. Переход к случаю, когда все атомы имеют одинаковую массу. Задача об электрических фильтрах 299

Тридцать первая лекция. Фильтры (продолжение). Задача о собственных колебаниях; граничные условия. Апроксимация кабеля одной ячейкой и многими ячейками. Фильтр как передающая система. Критическая частота; условия пропускания. „Обратный" фильтр. Физическое объяснение действия фильтров. Вычисление напряжения на конце фильтра в области пропускания. Резонанс 313

Тридцать вторая лекция. Фильтры (окончание). Исследование „прямого" фильтра при частоте выше критической. Распределение напряжения по ячейкам. Напряжение на конце. Поведение реальных фильтров при очень высоких частотах. Акустический резонатор и акустический фильтр. Механический фильтр В. Ф. Миткевича. Общие замечания о теории колебаний. Переход к распределенным системам. Разложимость произвольной функции по собственным функциям сплошной колебательной системы 322

Часть вторая.

Колебания распределенных систем

Первая лекция. Теория относительности утверждает, что не существует абсолютно твердых тел. Различные подходы к задаче о колебаниях твердого тела. Предельный переход к сплошной среде в решении задачи об одномерной упругой цепочке. Вывод уравнения

стержня из теории континуума. Замечания о понятии скорости волны. Производная для данного места и для данной частицы. Изотермический и адиабатический модули Юнга 333

Вторая лекция. Уравнения гидродинамики и вывод из них волнового уравнения. Определение понятия скорости волны. Скорость звука в газах по Ньютону и по Лапласу. „Элементарный" вывод уравнений двухпроводной электрической линии. Критика этого вывода. Правильная постановка задачи на основе теории Максвелла 342

Третья лекция. Рассмотрение двухпроводной линии на основе теории Максвелла. Статические задачи. Динамические задачи. Волновое уравнение. Условие применимости до-максвелловского рассмотрения. Постановка математической задачи о колебаниях распределенной системы: граничные и начальные условия 356

Четвертая лекция. Некоторые замечания о неоднородной электрической задаче. Различные краевые условия. Доказательство единственности решения и его связь с законом сохранения энергии. Способ Бернулли: разделение переменных. Постановка краевой задачи. Понятие о собственных значениях и собственных функциях . . 368

Пятая лекция. Уравнение, сходное с уравнением Шредингера. Периодические краевые условия. Собственные числа оператора. Основные свойства собственных чисел задачи Штурма—Лиувилля. Вопрос о разложимости функции в ряд по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля. Вопрос сходимости 379

Шестая лекция. Задача об однородном стержне с закрепленными концами. Частоты и формы колебаний. Свойства, типичные и нетипичные для общего случая задачи Штурма—Лиувилля. Случай свободных концов. Случай, когда один конец свободен, а другой — закреплен. Случай электрической линии, нагруженной конденсатором. Случай электрической линии, нагруженной катушкой самоиндукции 390

Седьмая лекция. Дополнительные замечания о граничных условиях. Однопроводная электрическая система. Понятие о решении Абрагама. Метод Даламбера. Начальные и граничные условия. Скорость фронта волны в неоднородной системе. 401

Восьмая лекция. Положительность собственных значений задачи Штурма—Лиувилля. Каждому собственному значению соответствует одна собственная функция. Экстремальное свойство основного собственного значения. Его применение для приближенной оценки основной частоты. Свойства ортогональности собственных функций и их физический смысл 411

Девятая лекция. Уравнение для отыскания собственных значений. Случай, когда нет собственных значений. Случай, когда любое число является собственным значением. Вычисление решений дифференциального уравнения в виде ряда по степеням параметра. Теорема о существовании бесчисленного множества собственных значений задачи Штурма—Лиувилля (начало) 421

Десятая лекция. Окончание доказательства основной теоремы о собственных значениях задачи Штурма—Лиувилля. Число узлов собственных функций. Оценки собственных значений. Изменение собственных значений при изменении параметров. Массы и индуктивности на концах распределенной системы 432

Одиннадцатая лекция. Роль интегральных уравнений для физики. Функция Грина для струны или стержня; ее зависимость от граничных условий. Функция Грина в теории потенциала. Свойство симметрии функции Грина. Интегральное уравнение для динамической

задачи о колебаниях струны или стержня. Симметризация ядра уравнения 443

Двенадцатая лекция. Невозможность построить функцию Грина в случае стержня со свободными концами. Предельный переход от задачи о колебаниях дискретной цепочки к интегральному уравнению колебаний стержня. Эквивалентность интегрального уравнения и дифференциальной схемы задачи Штурма—Лиувилля. Пример физической задачи другого типа, приводящей к интегральному уравнению: задача об идеальном оптическом изображении 453

Тринадцатая лекция. Дополнительные замечания по теории интегральных уравнений. Вопрос о возможности разложения произвольной функции, удовлетворяющей краевым условиям, по собственным функциям краевой задачи 463

Четырнадцатая лекция. Краткое резюме содержания предыдущей лекции. Вопрос об апроксимации функции конечным числом членов ряда. Полнота системы собственных функций. Вопрос об условиях разложимости и быстроте сходимости ряда. Распределение амплитуд гармоник в зависимости от начальных условий. Пример струны, возбуждаемой щипком и ударом. Электрический аналог возбуждения ударом. Влияние ширины интервала возбуждения при ударе 471

Пятнадцатая лекция. Замечания о собственных колебаниях. Вынужденные колебания. Однородное и неоднородное интегральное уравнение, альтернатива. Случай, когда внешняя сила ортогональна к собственному колебанию. Альтернатива в случае дискретной системы. Нарастающие решения при резонансе. Форма колебаний при очень малой частоте внешней силы. Форма колебаний вблизи резонанса. Зависимость амплитуды вынужденного колебания от формы внешней силы 482

Шестнадцатая лекция. Нарастание колебаний при резонансе. Случай, когда внешняя сила сосредоточена на малом участке. Рассмотрение того же случая с помощью дифференциального уравнения. Зависимость амплитуды от места возбуждения. Случай, когда задано движение в точке. Изменение числа узлов при повышении частоты внешней силы. Сравнительная оценка интегральных и дифференциальных уравнений. Интегральные уравнения колебаний стержня и мембраны. Приведение задачи теории потенциала к интегральным уравнениям 491

ОТ РЕДАКТОРА

Лекции по теории колебаний, прочитанные Леонидом Исааковичем Мандельштамом в 1930/31 и 1931/32 годах в Московском университете, до сих пор сохраняют значительный научный и педагогический интерес и могут послужить ценным материалом для преподавателей, аспирантов и студентов. Исходя из этих соображений, Комиссия по изданию трудов Л. И. Мандельштама признала целесообразным издать курс лекций по колебаниям не только в полном собрании его трудов, где этот курс составляет содержание тома IV, но и в виде отдельной книги.

Курс обработан проф. Г. С. Гореликом и окончательно подготовлен к печати проф. С. М. Рытовым.

Примечания редактора даны в квадратных скобках. В тех случаях, когда в примечаниях делаются ссылки на полное собрание трудов Л. И. Мандельштама, указываются только страница и номер тома.

М. А. Леонтович

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

КОЛЕБАНИЯ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИСТЕМ

ПЕРВАЯ ЛЕКЦИЯ

(Сентябрь 1930 г.)[1]

Для теории колебаний характерно рассмотрение не состояния в данный момент, а процесса в целом. Общие закономерности теории колебаний. Теория колебаний и волновая механика. Содружество математики, физики и техники в теории колебаний.

Совсем не легко дать определение того, что составляет предмет теории колебаний. Планк как-то сказал, что правильная классификация — это уже высокий вид познания. Это несомненно: ведь правильно классифицировать — это значит давать довольно полные определения. И в данном случае резко разграничить, что такое колебания, а что не колебания, так же трудно, как определить, что такое лысый человек или что такое куча. Постараюсь все же дать представление, о чем будет идти речь в нашем курсе.

Вы знаете маятник, знаете, как он колеблется. Все, что мы слышим, — тоже колебания. Свет также не что иное, как колебания. Электрические колебания вам тоже известны; на них основана вся радиотелеграфия. Движение „туда и обратно", в частности периодичность, — вот *некоторые* признаки колебаний.

Возьмем конкретный случай, например микрофон. Нас может интересовать, каково смещение его мембраны в данный момент

---

[1] [При обработке курса основным материалом служили весьма подробные записи А. А. Андронова, местами близкие по полноте к стенограмме. Лекции 11, 17, 18 и 23-я первой части курса были прочитаны А. А. Андроновым по плану, указанному Л. И. Мандельштамом. Они даны по конспектам А. А. Андронова. Дополнительным материалом служил конспект, составленный М. А. Дивильковским на основании собственных записей. Лекция 15-ая второй части курса, не записанная А. А. Андроновым, восстановлена по конспекту М. А. Дивильковского.]

в данном месте. Или, скажем, частица, движущаяся в заданном поле. Здесь можно интересоваться тем, где находится частица в такой-то момент времени.

Теория колебаний *меняет* эту постановку вопроса. Для нее не типичен интерес к тому, что происходит в данный момент в данном месте. Она мало этим занимается. Ее интересует главным образом *общий характер* процесса, взятого *в целом*, за большое время.

Например, камертон издает звук *la*. Этот звук *не* определяется положением (или скоростью) ножек камертона в данный момент. Запишем движение ножки камертона. То, что камертон дает тон *la*, характеризуется формой всей кривой в целом (рис. 1), определенными особенностями *всей* этой кривой. Хотя и говорят: „я слышу *la* в данный момент", в действительности дело обстоит не так; те доли секунды, в течение которых в ухе создается ощущение тона *la*, охватывают большое число максимумов и минимумов этой кривой. Ощущение звука *la* образуется, скажем, за полсекунды.

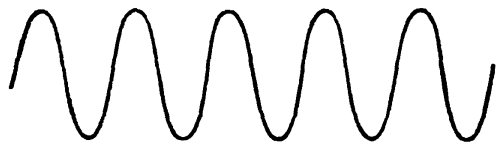


Рис. 1.

В качестве другой иллюстрации рассмотрим классический пример Галилея — Гельмгольца. На балке висит колокол. Вы можете сильно дергать веревку и не раскачаете колокола, а маленький мальчик его раскачает, если придаст выгодную форму кривой своей силы, если будет во-время увеличивать и уменьшать эту силу. Одно дело, насколько колокол отклонится под действием данного груза, другое — как раскачать колокол последовательными толчками. Именно *этим* интересуется теория колебаний. Чтобы раскачать колокол, надо дергать веревку в такт с его колебаниями. Здесь существенно то, что раскачивание определяется *всей* кривой, описывающей процесс воздействия на колокол за время его раскачивания.

В прошлом столетии были замечены следующие явления. Цепной мост иногда разрушался от того, что по нему в ногу шли солдаты. Электрические кабели, испытанные на определенное напряжение, скажем на 10 000 вольт, пробивались иногда при включении на 5000 вольт. Мост разрушается в том случае, когда шаг солдат попадает в такт с качаниями самого моста: когда мост возвращается в исходное положение, его вновь подталкивают.

В электрическом кабеле может происходить нечто похожее, и при этом напряжение постепенно нарастает.

Для этих явлений тоже характерно, что они определяются *всем* течением воздействия во времени.

Те стороны процессов, которые характеризуются их общим видом, формой процесса *в целом*, имеют громадное значение в теории колебаний. Здесь есть вполне определенные важные закономерности, которые остаются одними и теми же в самых разнообразных областях. Это и дает основание выделить теорию колебаний как таковую.

Однако не любой процесс подпадает под эту теорию. Это — теория процессов, в той или иной степени повторяющихся, в частности периодических.

Было бы бесплодным педантизмом стараться „точно" определить, какими именно процессами занимается теория колебаний. Важно не это. Важно выделить руководящие идеи, основные общие закономерности. В теории колебаний эти закономерности очень специфичны, очень своеобразны, и их нужно не просто „знать", а они должны войти в плоть и кровь.

Недавно происходила полемика, начатая Флемингом, который отрицал существование „боковых полос" при модуляции колебаний. Из этой полемики ясно видно, что колебательные закономерности не были им прочувствованы должным образом[1].

В самое последнее время появилось сенсационное известие об „открытии" Робинсона. Как известно, в радиотехнике *нельзя* строить передающие станции, работающие на слишком близких волнах, так как они мешают друг другу при приеме. Робинсон говорит, что с помощью его изобретения можно сближать волны как угодно. Если сделать некоторые обоснованные предположения, то разбор его изобретения сводится к одной известной задаче из области теории колебаний[2]. Но если не пользоваться при этом общими законами, то разобраться, в чем дело, — не так просто. Положение здесь примерно такое же, как с изобретениями вечного двигателя. Не так легко иной раз доказать, что в данном частном проекте имеется нарушение закона сохранения энергии, что то или другое предложение perpetuum mobile неосуществимо. Но зная этот общий закон, вы сразу говорите: „этого не может быть".

---

[1] [См. 16-ю лекцию.]

[2] [См. 19-ю лекцию.]

Следует особо подчеркнуть, что в приведенном примере с „изобретением“ Робинсона речь идет не о законах, специфичных для электричества, а о законах, общих всем колебательным явлениям.

Итак, разница между обычной динамикой и теорией колебаний ясна. Обычную динамику интересует в первую очередь то, что происходит в данном месте в данное время, теорию колебаний — движение в целом.

До последнего времени считалось, что колебания — вторичное явление, что первичными являются положение и скорость движущейся частицы в данный момент. Но в этом представлении наступил переворот. Волновая механика утверждает, что целостность процесса есть нечто столь же первичное, как положение частицы. В волновой механике нельзя говорить отдельно о месте и скорости частицы. То и другое должно быть описано, исходя из более основного понятия — целостности процесса. Таким образом, то, что характерно для теории колебаний — рассмотрение целостного процесса, — лежит в самой постановке проблем микромеханики. Вообще за последние четыре года колебания приобрели основное значение не только в макроскопической физике и технике, но и в законах микрофизики.

Содружество математики, физики и техники нигде так ярко не проявлялось, как в создании математического аппарата теории колебаний. Например, вся задача о колебаниях линейных дискретных систем сводится к учению высшей алгебры о квадратичных формах. Часто случалось, что математические вопросы возникали именно в связи с теорией колебаний. Особенно сильно это проявлялось в теории колебаний сплошных систем. Теория дифференциальных уравнений в частных производных и некоторые вопросы интегральных уравнений имеют чисто физическую основу, связанную с колебаниями. Замечу, что здесь математика в долгу у физики. Зато мы, физики, можем пользоваться тем, что математики продвигали в своих интересах. Отсюда, между прочим, видно, насколько неправильно деление на „абстрактные“ и „прикладные“ науки. Они получают пищу друг от друга. Хорошей иллюстрацией этого может служить пример рядов Фурье.

Еще одно небольшое замечание.

В теории колебаний широко пользуются упрощенной математической трактовкой, приводящей к *линейным* дифференциальным уравнениям, и еще очень недавно думали, что в теории колебаний можно ими ограничиться. Развитие радиотехники привело к тому,

что в некоторых весьма важных вопросах теория, основанная на линейных дифференциальных уравнениях, оказалась недостаточной. Сегодня, даже в элементарном курсе, уже нельзя ограничиваться линейным рассмотрением. Нам придется поэтому коснуться, хотя и в краткой форме, также нелинейных задач.

Перехожу к перечислению основных вопросов, которых мы будем касаться в нашем курсе (я не даю точной программы, а лишь некоторую наметку).

1. Основные понятия и терминология теории колебаний (специфические термины, как, например, частота, циклическая частота, логарифмический декремент и т. п.).

2. Математический аппарат, пригодный для теории колебаний.

3. Изучение тех систем и тех процессов, с помощью которых создаются колебания.

4. Распространение колебаний в пространстве (на этом мы почти не остановимся).

5. Прием, исследование, восприятие колебаний.

В качестве литературы я могу вам рекомендовать следующие книги:

А. Н. Крылов. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики; Мещерский. Курс теоретической физики; Релей. Теория звука; Helmholtz. Die Lehre von den Tonempfindungen и Vorlesungen über die theoretische Physik; Hort. Technische Schwingungslehre[1].

---

[1] [Здесь приводятся, конечно, те книги, которые были названы Л. И. Мандельштамом. В настоящее время имеется ряд других учебников и монографий, появившихся в нашей литературе позднее. Укажем некоторые из них: А. А. Андронов и С. Э. Хайкин. Теория колебаний, ч. I (М.—Л., 1937); С. М. Рытов. Модулированные колебания и волны (Труды физ. Инст. Акад. Наук СССР, 2, вып. 1, 41, 1939); Н. Г. Четаев. Устойчивость движения (М., 1946); А. Пуанкаре. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями (М., 1947); Т. Карман и М. Био. Математические методы в инженерном деле (М., 1948); Ю. И. Неймарк. Устойчивость линеаризованных систем (Л., 1949); Н. Н. Баутин. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости (М., 1949); И. Г. Малкин. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний (М., 1949); Ф. Морз. Колебания и звук (М., 1949); Г. С. Горелик. Колебания и волны (М.—Л., 1950); С. П. Стрелков. Введение в теорию колебаний (М., 1950); С. Г. Михлин. Проблемы минимума квадратичного функционала (М., 1952); Дж. Стокер. Нелинейные колебания в механических и электрических системах (М., 1952); И. М. Капчинский. Методы теории колебаний в радиотехнике (М.—Л., 1954).]

ВТОРАЯ ЛЕКЦИЯ

(Сентябрь 1930 г.)

Периодическая функция. Синусоидальная функция. Амплитуда, частота, циклическая частота, фаза. Диапазон частот, встречающихся в природе. Среднее, среднее квадратичное, эффективное значение. Сложение синусоидальных колебаний. Суперпозиция, неудачность термина „интерференция"; неаддитивность энергий. Сложение колебаний со случайными фазами; необходимость статистического постулата; аддитивность энергий в среднем; когерентные и некогерентные колебания.

Мы говорили в прошлый раз о том, что несколько трудно определить ту область, которой занимается теория колебаний. Мы говорили, что особенности, характерные для колебательных явлений, повторяются в самых разнообразных областях и что теория колебаний интересуется преимущественно целостными процессами. Среди процессов, находящихся в центре внимания теории колебаний, особенно важную роль играют процессы повторяющиеся или, в несколько более узком разрезе, периодические.

Мы займемся сначала периодическими процессами. В качестве математического инструмента мы будем пользоваться здесь периодическими функциями, т. е. такими функциями $y=f(t)$, что при любом t и определенном τ

$$f(t+\tau)=f(t).$$

τ называется периодом. Нетрудно показать, что если функция имеет период, то она имеет бесчисленное множество периодов. Действительно,

$$f(t+\tau+\tau)=f(t+\tau)=f(t).$$

Следовательно, 2τ — тоже период, и вообще любое целое кратное от периода есть период. Принято, говоря без каких-либо дальнейших указаний о периоде, иметь в виду наименьший период.

Итак, периодическая функция имеет бесконечное множество периодов. Возможны ли у периодической функции несоизмеримые периоды? Нетрудно доказать, что этого не может быть, если функция не есть постоянная (постоянная есть периодическая функция, для которой любое число есть период). Предположим, что функция имеет два периода τ и τ'. Если τ — период, то $n\tau$, где n — любое целое число, тоже период. Если τ' — период, то $m\tau'$, где m — любое целое число, тоже период. Если τ и τ' несоизмеримы, то можно выбрать n и m так, чтобы разность $m\tau'-n\tau$

была как угодно мала. Но эта разность тоже есть период, а значит, функция имеет сколь угодно малый период. Но такая функция есть постоянная.

Построить периодическую функцию можно весьма разнообразными способами. Можно, например, задать в некотором интервале $(0, \tau)$ любую функцию и затем повторять ее неограниченное число раз слева и справа. Вообще говоря, значения функции в начале интервала и в конце предыдущего не совпадут (рис. 2). Следовательно, построенные таким путем функции в общем случае не будут непрерывны, а будут иметь скачки на границах интервала $(0, \tau)$. Таким образом, в рассмотрение входят разрывные функции.

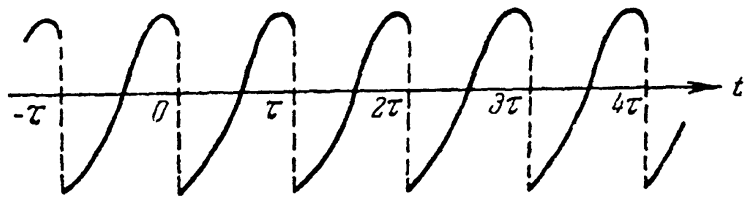


Рис. 2.

Функции, принадлежащие к классу периодических, весьма разнообразны. Среди них есть функции, образующие подкласс, играющий особенно важную роль, а именно синусообразные функции. Их общая запись такова:

$$y = f(t) = a\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t - \varphi\right).$$

Здесь имеются три постоянные величины: a, φ и τ.

Функции такого вида играют в физике громадную роль. Чем это вызвано? Иногда говорят — тем, что синусообразная функция — „самая простая“ из периодических функций. Но такой ответ вряд ли удовлетворителен, так как критерий „простоты“ — в достаточной мере неопределенный критерий. Роль этих функций в физике обусловлена главным образом тем значением, какое имеют в теории колебаний гармонические (синусообразные) колебания.

Существует бесчисленное множество явлений, которые изображаются такого рода функциями. Прежде всего колебания маятника (приблизительно, если они малы), в оптике — „спектрально простой“ (монохроматический) свет. В акустике с понятием синусоидального колебания связано понятие о чистом тоне: чистый тон имеет место тогда, когда частицы воздуха колеблются гармонически. Радио-

станции, когда они работают, но не производят передачу сигналов, дают электромагнитные колебания, очень близкие к гармоническим.

Придется сказать несколько слов о терминах, хотя многое здесь хорошо известно.

Величина

$$\nu = \frac{1}{\tau}$$

называется *частотой* колебаний. Пользуясь ν, формулу гармонических колебаний можно записать в виде

$$y = a\cos(2\pi\nu t - \varphi).$$

При такой записи приходится всюду писать множитель 2π. Чтобы этого избежать, часто вводят вместо ν *циклическую частоту* ω:

$$\omega = 2\pi\nu$$

(мы будем также обозначать ее иногда буквами n и p).

Почему ω называется циклической частотой? Рассмотрим равномерное движение по окружности, происходящее с тем же периодом, что и наше гармоническое колебание. Тогда ω будет угловой скоростью движения по кругу (циклу).

Физический смысл величины a весьма прост. Эта величина, называемая амплитудой, равна максимальному значению y.

Что такое φ? Если мы изменим величину φ, которая называется *фазой*, то функция будет приобретать то значение, которое она имела в определенный момент $t = t_1$ при каком-то другом значении $t = t_2$. Сдвиг на $^1/_4$ периода соответствует $\varphi = \pi/2$. Функции cos и sin отличаются только фазой: замена одной из этих функций другой означает лишь перемещение кривой по времени на четверть периода.

Фаза играет чрезвычайно важную роль, если имеется *два* колебательных процесса и производится сдвиг одного из них по отношению к другому.

Интересно, каковы численные значения частот у встречающихся в природе периодических процессов.

Вот частоты некоторых периодических явлений в сек$^{-1}$:

10^{-10} — вековые возмущения планет;

10^{-8} — обращения планет;

10^{-5} — приливы и отливы;

10^{1} — колебания в машинах;

10^0 — секундный маятник;
до 10^4 — акустические колебания;
10^5—10^8 — быстрые (ультразвуковые) механические колебания пьезокварца;
50 — переменный ток;
10^5—10^8 — радиотелеграфия;
10^{12} — инфракрасное излучение;
10^{15} — видимый оптический спектр;
10^{18} — рентгеновы лучи;
10^{20} — γ-лучи;
10^{23} — космические лучи.

Таким образом, получается колоссальный диапазон от 10^{-10} до 10^{23} колебаний в секунду. При этом ряд характерных закономерностей остается в силе на протяжении всей шкалы, например, в приливах и в световых колебаниях...

Остановимся коротко на некоторых свойствах функций cos и sin.

Рассмотрим прежде всего их средние значения. Среднее из нескольких величин есть сумма этих величин, деленная на их число. Например, среднее из четырех чисел 3, 4, 5, 10 есть

$$\frac{3+4+5+10}{4}=5{,}5.$$

Подобно этому *среднее значение функции* $f(t)$ в интервале от t_1 до t_2 есть

$$\overline{f(t)}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt.$$

Во многих вопросах это среднее играет первостепенную роль. Вот, например, один из таких вопросов: дана большая масса, как она будет двигаться при действии на нее быстропеременной силы? Для ответа на этот вопрос нужно знать среднее значение силы[1].

Среднее значение cos за период равно нулю:

$$\overline{\cos(\omega t-\varphi)}=0;$$

его среднее значение за полпериода равно $2/\pi$.

---

[1] [См. 20-ую лекцию.]

Часто представляет интерес *среднее квадратичное* значение синусообразной функции, т. е. среднее значение от

$$y^2 = a^2 \cos^2(\omega t - \varphi).$$

Оно равно

$$\overline{y^2} = \frac{a^2}{2}.$$

Это чрезвычайно важный результат. Например, в случае синусообразного переменного тока среднее, выделяющееся в единицу времени, количество теплоты пропорционально $a^2/2$; теплоты выделяется в среднем столько же, как если бы тёк постоянный ток силы $a/\sqrt{2}$. Величина $a/\sqrt{2}$ называется эффективным значением гармонически колеблющейся величины.

Пусть теперь у нас имеется не одно, а два, три и т. д., вообще N, сосуществующих гармонических колебаний одинаковой частоты:

$$y_1 = a_1 \cos(\omega t - \varphi_1),$$

. . . . . .

$$y_N = a_N \cos(\omega t - \varphi_N).$$

Спрашивается, каково будет $y_1 + y_2 + \ldots + y_N$. Математически вопрос решается элементарно, но что значит такое суммирование *физически?*

Разложение на слагаемые неоднозначно. 10 равно $3 + 7$, но оно равно также $5 + 5$. Что хотят сказать, говоря, что некоторая величина есть сумма двух гармонических колебаний? В каких случаях имеет смысл такая постановка вопроса?

Вот прототип подобных случаев. Пусть имеется два источника света. Пусть первый источник света в отдельности дает поле (колебание) y_1, второй источник в отдельности — поле (колебание) y_2. Какое поле будет при наличии обоих источников? Заранее вы ничего не можете об этом сказать. Но существует такой *экспериментальный факт*: поле при наличии обоих источников равно сумме полей, создаваемых каждым источником в отдельности. Есть и такие случаи, когда складывать колебания нельзя: так будет всякий раз, когда имеется нелинейность, например при больших амплитудах в акустике. Вопрос о том, когда можно складывать отдельные колебания и когда нельзя, — это не математический, а *физический* вопрос.

Возьмем сначала следующий простой случай:

$$y = A\cos\omega t + B\sin\omega t.$$

Легко видеть, что здесь

$$y = C\cos(\omega t - \psi),$$

причем

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{B}{A}.$$

Перейдем теперь к более общему случаю:

$$y = a_1\cos(\omega t - \varphi_1) + a_2\cos(\omega t - \varphi_2).$$

Здесь

$$y = a\cos(\omega t - \varphi),$$

причем

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2), \\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2}{a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Сумма двух гармонических колебаний одинаковой частоты есть опять гармоническое колебание той же частоты. Отсюда следует, что сумма любого числа гармонических колебаний одинаковой частоты также будет гармоническим колебанием той же частоты.

Первая формула (1) показывает, что амплитуда существенным образом зависит от фаз складываемых колебаний. В этой формуле заключена, по сути дела, вся теория интерференционных явлений.

В частности, если $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, имеем:

$$a^2 = (a_1 + a_2)^2;$$

если $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$, имеем:

$$a^2 = (a_1 - a_2)^2;$$

если $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2$, имеем:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2.$$

Если $a_1 = a_2$, то при $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ имеем:

$$a^2 = 4a_1^2.$$

Квадрат амплитуды определяет собой энергию. В последнем случае при сложении амплитуда удваивается и, следовательно,

энергия учетверяется. Энергии складываются только в том случае, когда сдвиг фаз равен $\pm\pi/2$.

Слово „интерференция" значит взаимодействие; но здесь для самих колеблющихся величин *у* взаимодействия *нет*: для них справедлив принцип суперпозиции (наложения). Для энергии он не справедлив, так как энергии взаимодействуют, они действительно интерферируют. Для самих колеблющихся величин термин „интерференция" неудачен. На это указывал еще Релей. Заметим, что непосредственный физический смысл имеют во многих случаях не сами величины, входящие в уравнения, — уравнения Максвелла, уравнение Шрёдингера и т. п., — а их квадраты (точнее, в случае уравнения Шрёдингера, квадрат модуля). Именно для этих квадратичных величин имеет место интерференция.

Подчеркну еще раз, что аддитивность не есть нечто самоочевидное. Пусть, например, один переменный ток выделяет в секунду 10 калорий, второй ток — столько же. Если они будут течь вместе, они будут выделять, вообще говоря, не 20 калорий в секунду. Количество выделяемой в секунду теплоты может равняться и 0, и 40 калориям: решающей здесь является разность фаз обоих токов.

В физике встречаются и иного типа вопросы о сложении колебаний. Имеется, например, светящийся газ. В нем очень много молекул, излучающих поля с разнообразными амплитудами и фазами. Какова амплитуда результирующего колебания? Казалось бы, достаточно сказать, какова амплитуда и фаза каждого колебания, — мы их сложим и получим ответ. Но если фазы отдельных колебаний не известны, то и о результирующей амплитуде ничего сказать нельзя.

Для простоты предположим сначала, что имеется всего два источника, создающие колебания с одинаковой амплитудой, равной единице, и с фазами, которые могут принимать два значения: 0 и π. Таким образом, первое колебание есть $\pm\cos\omega t$, второе — также $\pm\cos\omega t$. Какова амплитуда результирующего колебания?

Возможны следующие комбинации:

+	—	0
+	+	4
—	—	4
—	+	0

(в первых двух столбцах — знаки амплитуд первого и второго колебания, в третьем столбце — квадрат амплитуды результирую-

щего колебания). Если мы не знаем, какая из этих возможных комбинаций осуществляется, мы ничего не можем сказать об амплитуде результирующего колебания. Иногда говорят: нет оснований, чтобы одна комбинация встречалась чаще, чем другая. В действительности это утверждение ниоткуда не вытекает с необходимостью. По существу здесь возникает вопрос, находящийся вне компетенции тех методов, которыми мы до сих пор пользовались. Для того, чтобы ответить на вопрос, как часто встречается та или другая комбинация, нужна новая гипотеза, *новый постулат*. Такого рода *статистические* гипотезы проходят красной нитью через многие вопросы физики.

Сделаем следующее *статистическое предположение:* если мы рассматриваем явление в течение долгого времени, то фазы каждого из колебаний успевают много раз измениться и одинаково часто встречается любая из четырех комбинаций. Тогда средний квадрат амплитуды будет равен 2, т. е. энергии *в среднем* будут складываться.

Сделанное дополнительное предположение позволяет выводить заключения только для очень большого числа опытов и только в среднем. Но без этого (или иного) дополнительного предположения здесь вообще нельзя ничего получить[1].

К затронутому вопросу имеет прямое отношение известная полемика между Больцманом и Бертраном. Больцману казалось, что он чисто математически вывел свою H-теорему из классической механики, без дополнительных предположений статистического характера. Он просто упустил при этом из виду одно постулативно высказанное им положение о числе соударений (Stosszahlansatz). Бертран по поводу этого „чисто математического" вывода сказал: это напоминает задачу о корабле, который имеет столько-то мачт, пушек и т. д., и требуется найти из этих данных возраст капитана.

Рассмотрим теперь сложение N колебаний вида $\pm \cos \omega t$. Пусть, например, мы имеем такое распределение:

1	2	3	4	5	6	...
+	—	+	—	—	—	...

(первая строка: номер колебания; вторая: знак его амплитуды).

---

[1] [Ср. 9-ую и 10-ую лекции.]

Что вероятнее: написанная здесь комбинация или другая, в которой сначала будет 2 раза подряд + или 3 раза подряд +? Когда мы говорим, что все комбинации одинаково вероятны (или: все распределения встречаются одинаково часто), то надо ясно понимать, что это — *постулат*.

Всего складывается N колебаний. Пусть из них N_1 входят с минусом, остальные $N-N_1=N_2$ — с плюсом. Квадрат результирующей амплитуды имеет величину $(N-2N_1)^2$. Спрашивается, сколькими способами (при заданном N) может быть осуществлено такое значение результирующей интенсивности?

Пусть X — число комбинаций, осуществляющих такое значение интенсивности, т. е. комбинаций с N_1 минусами и $N-N_1$ плюсами.

Возьмем какую-нибудь одну из этих комбинаций. Путем перестановок N_1 амплитуд, вошедших с минусом, мы можем осуществить $N_1!$ комбинаций с тем же числом плюсов и минусов; путем перестановок $N-N_1$ амплитуд, вошедших с плюсом, мы можем осуществить $(N-N_1)!$ комбинаций с тем же числом плюсов и минусов. Следовательно, путем перестановок N_1 амплитуд с минусом и $(N-N_1)$ амплитуд с плюсом мы получаем $N_1!(N-N_1)!$ комбинаций с тем же числом плюсов и минусов. Сделав такие перестановки в каждой из наших X комбинаций, как исходной, мы получим всевозможные перестановки из N элементов, т. е.

$$X\cdot N_1!(N-N_1)!=N!$$

Отсюда

$$X=\frac{N!}{N_1!\,(N-N_1)!}=C_N^{N_1}$$

(число сочетаний из N по N_1). Каждая из этих комбинаций дает квадрат амплитуды $(N-2N_1)^2$. Средний квадрат амплитуды есть сумма всех значений квадрата амплитуды, деленная на общее число этих значений. Таким образом:

$$\overline{a^2}=\overline{(N-2N_1)^2}=\frac{\sum\limits_{N_1=0}^{N} C_N^{N_1}(N-2N_1)^2}{\sum\limits_{N_1=0}^{N} C_N^{N_1}}. \qquad (2)$$

Нетрудно убедиться, что нижняя сумма равна 2. Действительно, из формулы бинома

$$(x+1)^N=\sum_{N_1=0}^{N} C_N^{N_1}x^{N_1}$$

при $x=1$ получаем:

$$2^N=\sum_{N_1=0}^{N} C_N^{N_1}. \tag{3}$$

Для вычисления верхней суммы, стоящей в числителе (2) (обозначим ее S), употребим изящный прием, связанный с разбиением этой суммы на две и с преобразованием второго слагаемого:

$$S=N^2\sum_{N_1=0}^{N} C_N^{N_1}-4N(N-1)\sum_{N_1=0}^{N}\frac{(N-2)!\,N_1\,(N-N_1)}{N_1!\,(N-N_1)!}.$$

Воспользовавшись (3) и заметив, что во второй сумме члены с $N_1=0$ и $N_1=N$ равны нулю, получаем:

$$S=N^2\cdot 2^N-4N(N-1)\sum_{N_1=1}^{N-1}\frac{(N-2)!\,N_1\,(N-N_1)}{N_1!\,(N-N_1)!}.$$

Входящая сюда сумма может быть представлена в виде

$$\sum_{N_1=1}^{N-1}\frac{(N-2)!}{(N_1-1)!\,[N-2-(N_1-1)]!}=\sum_{n=0}^{N-2}\frac{(N-2)!}{n!\,(N-2-n)!}$$

и согласно (3) равна 2^{N-2}. Следовательно,

$$S=N^2\cdot 2^N-4N(N-1)\cdot 2^{N-2}=[N^2-N(N-1)]\,2^N=N\cdot 2^N. \tag{4}$$

Подставляя (3) и (4) в (2), получаем:

$$\overline{a^2}=N.$$

Если амплитуда отдельного колебания равна не 1, а α, то

$$\overline{a^2}=N\alpha^2.$$

Итак, в случае сложения колебаний со случайными фазами энергии (в среднем) складываются.

Если разности фаз между колебаниями постоянны, то говорят о *когерентных* колебаниях. Если же фазы разбросаны совершенно беспорядочно, то говорят, что колебания *некогерентны*. Такие некогерентные колебания испускаются, например, молекулами светящегося газа.

Мы рассмотрели частный случай, когда фазы равны либо 0, либо π. Можно рассмотреть общий случай, когда фазы принимают любые значения. Релей показал, что и в этом общем случае некогерентности энергии (вcреднем) складываются. Это — очень существенная теорема.

ТРЕТЬЯ ЛЕКЦИЯ

(Октябрь 1930 г.)

Задача об апроксимации функций тригонометрическими полиномами. Теорема Фурье. Исторические замечания о понятии функции. Класс функций, разложимых в ряд Фурье. Метод комплексных величин; когда можно и когда нельзя его применять.

Нам нужно коснуться вычислительного приема, широко применяемого в теории колебаний, — использования комплексных величин. Здесь необходимо предостеречь от одной распространенной ошибки: часто бывает так, что к этому приему привыкают, а потом забывают, когда можно и когда нельзя им пользоваться.

Напишем известные формулы:

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx,$$

$$\cos kx = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}), \quad \sin kx = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx}),$$

где

$$i \cdot i = -1.$$

Эти формулы позволяют выразить синусоидальные колебания через комплексные экспоненциальные функции. В волновой механике теория строится так, что в нее непосредственно входят комплексные величины. Здесь, в теории колебаний, дело обстоит иначе. Нас интересуют *действительные* величины. Например, когда мы пишем e^{ikx}, то нас интересует действительная часть этого выражения, т. е. $\cos kx$; но работать с комплексными величинами удобно, потому что при дифференцировании они себя воспроизводят с точностью до множителя, между тем как синус и косинус ведут себя сложнее.

Всякую комплексную величину $a+ib$ можно представить в виде $Ae^{i\varphi}$, где A и φ — действительные величины, причем

$$A=\sqrt{a^2+b^2},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$$

(заметим, что фаза φ определена здесь неоднозначно).

При перемножении комплексных величин фазы их просто складываются, и это — второе, очень удобное свойство.

Часто мы имеем дело с величинами вида

$$\xi=(a+ib)\,e^{i\omega t}. \tag{1}$$

Какова действительная часть этого выражения? Имеем:

$$(a+ib)\,e^{i\omega t}=Ae^{i(\omega t+\varphi)}=A\cos(\omega t+\varphi)+iA\sin(\omega t+\varphi),$$

и, следовательно, искомая действительная часть есть

$$A\cos(\omega t+\varphi).$$

Если колебание задано в виде (1), то произведение $\xi\xi^*$ величины ξ на сопряженную ей величину

$$\xi^*=(a-ib)\,e^{-i\omega t}$$

дает квадрат амплитуды действительной части ξ:

$$\xi\xi^*=(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2=A^2. \tag{2}$$

Для того, чтобы найти квадрат амплитуды, не нужно переходить от выражения (1) к его действительной части.

Рассмотрим оптическую задачу — о диффракционной решетке (рис. 3), наглядно иллюстрирующую преимущества оперирования комплексными величинами.

Колебания, идущие от соседних щелей решетки, имеют благодаря разности путей разность фаз

$$\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\alpha.$$

В фокусе линзы происходит сложение m когерентных колебаний (m — число щелей решетки). Результирующее колебание в точке наблюдения есть

$$\cos\omega t+\cos(\omega t+\varphi)+\cos(\omega t+2\varphi)+\ldots+\cos[\omega t+(m-1)\varphi]. \tag{3}$$

Непосредственно сложить эти m членов не так просто. Воспользуемся, однако, комплексным представлением: первый член суммы есть действительная часть от $e^{i\omega t}$, второй — действительная часть от $e^{i(\omega t+\varphi)}$ и т. д.

Как известно, действительная часть суммы комплексных величин есть сумма действительных частей слагаемых (но действительная часть произведения не равна произведению действительных частей). Сумму комплексных величин найти очень просто: это сумма геометрической прогрессии с показателем $e^{i\varphi}$. Она равна

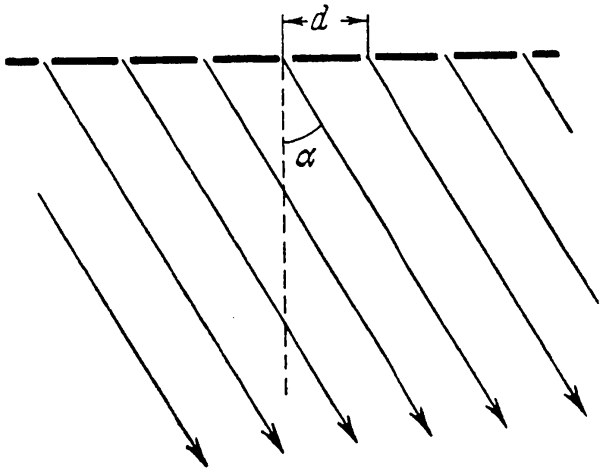


Рис. 3.

$$\xi = e^{i\omega t}\,\frac{e^{im\varphi}-1}{e^{i\varphi}-1}. \qquad (4)$$

Сумма (3) равна действительной части этого выражения. Но часто нас интересует только квадрат амплитуды колебания (3), т. е. квадрат амплитуды A действительной части комплексного выражения (4). Согласно (2)

$$A^2 = \xi\xi^* = \frac{1-\cos m\varphi}{1-\cos\varphi} = \frac{\sin^2\frac{m\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Рассмотрим еще одно свойство комплексных величин, которое также играет существенную роль в том, почему они так часто употребляются в теории колебаний.

Пусть дана комплексная функция времени

$$f(t)+ig(t).$$

Ее производная есть

$$\dot{f}+i\dot{g},$$

т. е. действительная часть от производной комплексной функции по действительному аргументу есть производная от действительной части функции.

Пусть у нас есть дифференциальное уравнение

$$\ddot{y}+k\dot{y}+\omega_0^2 y = \cos\omega t. \qquad (5)$$

Можно найти частное решение этого уравнения, работая с косинусом и синусом, но проще сделать так. Напишем *другое* дифференциальное уравнение:

$$\ddot{y} + k\dot{y} + \omega_0^2 y = e^{i\omega t}$$

и будем искать решение нового уравнения в комплексной форме:

$$y = Ae^{i\omega t}. \tag{6}$$

Тогда для A получается простое уравнение

$$A(-\omega^2 + i\omega k + \omega_0^2)\, e^{i\omega t} = e^{i\omega t}.$$

Действительная часть получаемого таким путем выражения (6) будет удовлетворять интересующему нас дифференциальному уравнению (5). Это возможно лишь потому, что при подстановке (6) в дифференциальное уравнение мы только дифференцировали и складывали.

Все это важно и полезно, но нужно знать, когда так делать нельзя. Пусть, например,

$$y\dot{y} = \cos \omega t.$$

Можно ли решать это уравнение, заменив правую часть на $e^{i\omega t}$? Нельзя, и эта замена ничего не даст, потому что действительная часть произведения не есть произведение действительных частей.

Пусть $y = a \cos \omega t$ есть ток. Количество тепла, выделяющееся в единицу времени в сопротивлении R, равно

$$Ry^2 = Ra^2 \cos^2 \omega t.$$

Мы не получим правильного значения этого выражения, если напишем $y = ae^{i\omega t}$, возведем в квадрат и возьмем действительную часть: действительная часть квадрата не есть квадрат действительной части.

Итак, комплексные величины представляют большое удобство, но, пользуясь ими, нужно остерегаться нелинейных операций.

Перейдем теперь к рассмотрению функций периодических, но не гармонических, — к рядам Фурье. Вся теория этих рядов возникла из физики — из вопроса о колебаниях струны. Недаром известный математик Клейн настаивал на том, чтобы вопрос о разложении в ряд Фурье излагался физикам иначе, чем это обычно делают математики.

Предположим, что мы имеем периодическую функцию $f(x)$. Для простоты примем период равным 2π (отсюда легко перейти к функции с любым периодом). Можно ли апроксимировать $f(x)$ другими периодическими функциями $\varphi(x)$, т. е. заменить $f(x)$ другими периодическими функциями так, чтобы ошибка при замене была очень мала?

Нужно выбрать какую-нибудь меру ошибки. В качестве такой меры возьмем среднюю квадратичную ошибку:

$$\overline{\Delta^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \{f(x) - \varphi(x)\}^2 \, dx. \tag{7}$$

Это — принимаемое нами определение погрешности. Мы будем апроксимировать так, чтобы средняя квадратичная ошибка была возможно меньше. Если бы, например, мы выставили требование, чтобы интеграл

$$\overline{\Delta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \{f(x) - \varphi(x)\} \, dx$$

(средняя ошибка) был возможно меньше, то ни к чему хорошему это не привело бы. Могло бы быть так, что средняя ошибка равна нулю, между тем как на больших интервалах существуют громадные (по абсолютной величине) отклонения $\varphi(x)$ от $f(x)$. При выбранной нами мере ошибки этого не может быть. Но вместе с тем ясно, что это не единственно возможный целесообразный выбор.

Возьмем в качестве заменяющей функции $\varphi(x)$ периодическую функцию

$$S_n = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \tag{8}$$

с тем же периодом 2π, что и исходная функция $f(x)$. Вопрос ставится так: нужно выбрать $(2n+1)$ коэффициентов α_0, α_1, α_2, ..., β_1, β_2, ... таким образом, чтобы средняя квадратичная ошибка (7) была возможно меньше. Подставим (8) в (7):

$$\overline{\Delta^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x) \, dx - \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\alpha_0}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \, dx + \right.$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left[\alpha_k\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos kx\,dx+\beta_k\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\sin kx\,dx\right]\Bigg\}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right]^2dx. \qquad (9)$$

Введем далее величины:

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos kx\,dx,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\sin kx\,dx \qquad (10)$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

которые называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$.

Гармонические функции обладают следующими свойствами:

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{+\pi}\cos kx\sin lx\,dx=0,\\&\int_{-\pi}^{+\pi}\cos kx\cos lx\,dx=\begin{cases}0 & (k\neq l),\\ \pi & (k=l),\end{cases}\\&\int_{-\pi}^{+\pi}\sin kx\sin lx\,dx=\begin{cases}0 & (k\neq l),\\ \pi & (k=l),\end{cases}\\&(k,\ l=1,\ 2,\ \ldots).\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Воспользовавшись формулами (10) и (11), после несложных преобразований получаем из (9):

$$\overline{\Delta^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f^2(x)\,dx+\frac{(\alpha_0-a_0)^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[(\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2]-$$

$$-\frac{a_0^2}{4}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2).$$

В этом выражении переменными являются α_k и β_k. Мы должны их выбрать так, чтобы $\overline{\Delta^2}$ было наименьшим. Это будет, очевидно, тогда, когда члены, зависящие от α_k и β_k, равны нулю, т. е. когда коэффициенты при косинусах и синусах в заменяющей функции (8) равняются соответствующим коэффициентам Фурье.

Ошибка при таком апроксимировании [при таком выборе функции $\varphi(x)$] равна

$$\overline{\Delta^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2). \qquad (12)$$

Здесь нужно отметить следующие два замечательные обстоятельства.

Допустим, что мы прибавляем к заменяющей функции (8) еще один член с $k = n+1$. Тогда оказывается, что при наилучшем апроксимировании коэффициенты при прежних членах останутся теми же, что и раньше. Ниоткуда не следует, что в задачах об апроксимации функций дело будет так обстоять всегда. Но в данном случае наилучшая апроксимация n членами не зависит от последующего улучшения апроксимации: первые члены не нужно пересматривать при добавлении новых. Это объясняется тем свойством синусов и косинусов, что интеграл за период 2π от произведения любых двух различных функций из совокупности $\cos kx$, $\sin kx$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) равен нулю [формулы (11)]. Функции, обладающие таким свойством, называются *ортогональными* функциями.

Совокупность функций

$$\begin{array}{llll} \cos t, & \cos 2t, & \cos 3t, & \ldots \\ \sin t, & \sin 2t, & \sin 3t, & \ldots \end{array}$$

является примером совокупности ортогональных функций в интервале $(-\pi, +\pi)$.

Перейдем ко второму замечательному обстоятельству. Возникает вопрос: является ли система функций

$$\cos kx,\ \sin kx \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n) \qquad (13)$$

замкнутой, т. е. существует ли периодическая функция с периодом 2π, которая была бы ортогональна ко всем этим функциям? Оказывается, что при $n = \infty$ всякая функция, ортогональная ко всем функциям (13), равна тождественно нулю, т. е. при $n = \infty$ система (13) — замкнутая.

Вернемся к выражению (12) для средней квадратичной ошибки. Чем больше берется членов в заменяющей функции (8), тем ошибка

меньше. Теорема Фурье заключается в следующем: при некоторых условиях[1] бесконечный ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{14}$$

сходится и представляет собой функцию $f(x)$.

Обычно начинают изложение с задачи о точном представлении функции тригонометрическим рядом. Но физик не может работать с бесконечным числом членов. Поэтому для него важна именно та задача, с которой мы начали, — задача об апроксимации.

Очень важно выяснить, всякую ли периодическую функцию можно представить в виде ряда Фурье (14)? В связи с этим интересно проследить историю задачи о представлении функции рядами Фурье. Первый вопрос, который здесь возник, был общий вопрос о том, что такое функция.

Эйлер считал, что существуют аналитические и геометрические функции. Мы получаем, говорил он, аналитические функции, беря такие выражения, как x, x^2, $\sin x$ и т. д. Мы получаем геометрическую функцию, если опишем „свободной рукой" произвольную кривую[2]. Эти воззрения не отвечают современному определению функций: y есть функция от x, если каждому значению x соответствует определенное значение y.

Бернулли, получив решение в виде тригонометрического ряда[3] (т. е., по Эйлеру, в виде „аналитической функции"), утверждал, что им получено *общее* решение, что так можно представить *любую* функцию.

Это казалось невероятным. Ведь коэффициенты ряда

$$a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$$

образуют счетное множество, в то время как „число" значений функции гораздо больше, множество этих значений более мощное. Тем не менее Фурье имел смелость сказать, что совершенно произвольная (графически заданная) непрерывная функция может быть представлена в виде тригонометрического ряда. И это правильно, потому что (как теперь известно) непрерывные функции

---

[1] [См. ниже.]

[2] [См., например, С. Н. Бернштейн. Исторический обзор развития понятия функции. Вестник опытной физики и элементарной математики, № 559, сем. 47, стр. 177, 1912.]

[3] [См. 32-ую лекцию и 5-ую лекцию части II.]

вовсе не так разнообразны, как это кажется на первый взгляд. Достаточно задать непрерывную функцию в рациональных точках, чтобы определить ее полностью. Другими словами, непрерывные функции задаются совокупностью своих значений в *рациональных* точках. Но эти точки составляют множество такой же мощности, как и коэффициенты разложения (счетное множество). Если мы примем это во внимание, то нас уже не удивит возможность представить любую непрерывную функцию в виде ряда Фурье.

Но плохо, если что-нибудь становится „слишком" понятным. Я боюсь, что разложение в ряд Фурье уже кажется чем-то само собой понятным. Это не так: с бесконечными совокупностями нужно обращаться осторожно. Например, возьмите ряд Фурье и выбросьте из него третий член. Число членов остается бесконечным, и тем не менее с помощью такого бесконечного ряда любую непрерывную функцию уже представить нельзя.

Теорема Фурье справедлива при известных ограничениях (достаточные условия того, что функция может быть представлена рядом Фурье, были указаны Дирихле); рядом Фурье могут быть представлены не все непрерывные функции. С другой стороны, в виде рядов Фурье может быть представлен определенный класс разрывных функций, имеющих только разрывы первого рода (т. е. такие, что и слева и справа от разрыва функция имеет определенное значение). Для того, чтобы функция могла быть представлена рядом Фурье, она должна иметь конечное число разрывов и не должна иметь бесконечного числа максимумов и минимумов. Например, непрерывную функцию $\sin(1/x)$, которая при $x \to 0$ имеет бесконечно густые максимумы, нельзя разложить в ряд Фурье.

Тот класс функций, которые могут быть представлены рядом Фурье, вполне достаточен для физических целей. Практически любая интересующая физика функция может быть разложена в ряд Фурье.

Как быстро убывают коэффициенты Фурье? Ряд (14) сходится тем быстрее, чем функция $f(x)$ глаже. Если h — порядок разрыва (т. е. порядок наинизшей терпящей разрыв производной), то асимптотически, при достаточно больших k, коэффициенты убывают, как $1/k^{h+1}$.

Существуют ли различные функции, представляемые одним и тем же рядом Фурье? Да, существуют. Они отличаются одна от другой тем, что имеют различные значения в *конечном* ряде

точек. Но это исключительный случай. Интересующие нас функции однозначно определяются своим рядом Фурье.

Теорема Фурье была впервые высказана им в 1822 г. в его „Théorie analytique de la chaleur", но еще в 1750 г. ее предугадал Бернулли.

Синусы и косинусы — не единственная система ортогональных функций, по которым можно разлагать произвольную функцию. Существует бесконечное множество таких систем. С этой точки зрения ряд Фурье — чрезвычайно частный случай. Но разложение по косинусам и синусам, т. е. по гармоническим колебаниям, сыграло очень большую роль в развитии общей теории разложения по ортогональным функциям. В математике остальные разложения тоже важны, не менее важны, чем разложение Фурье. Но разложение Фурье выделено благодаря физическим условиям [1].

ЧЕТВЕРТАЯ ЛЕКЦИЯ

(Октябрь 1930 г.)

Ряды Фурье (продолжение); явление Гиббса. Биения. Как мы узнаём направление на источник звука. „Гармоническое колебание с медленно меняющейся амплитудой и фазой". Критерий медленности определяется конкретной физической задачей. Кажущееся нарушение закона сохранения энергии при интерференции.

Мы сейчас разберем немного формальные, но необходимые вопросы. Как мы видели в прошлый раз, всякую интересующую нас функцию $f(x)$ с периодом 2π можно разложить в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{1}$$

причем

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx \, dx. \tag{2}$$

Для того, чтобы эти формулы годились и для $k = 0$, нужно писать постоянный член в виде $a_0/2$.

Обычно приходится иметь дело с функцией, имеющей период $\tau \neq 2\pi$. Если сделать замену

$$\frac{2\pi}{\tau} y = x, \tag{3}$$

[1] [См. 16-ую лекцию.]

то функция $f(2\pi y/\tau)$, рассматриваемая как функция y, имеет период τ, если $f(x)$ имеет период 2π (когда y увеличивается на τ, то аргумент x увеличивается на 2π). Обозначив

$$f\left(\frac{2\pi}{\tau}y\right)=\varphi(y)$$

и сделав в (1) и (2) замену (3), получаем:

$$\varphi(y)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\left(\frac{2\pi y}{\tau}\right)+b_k\sin\left(\frac{2\pi y}{\tau}\right)\right],$$

где

$$a_k=\frac{2}{\tau}\int_{-\tau/2}^{+\tau/2}\varphi(y)\cos\left(k\,\frac{2\pi y}{\tau}\right)dy,\quad b_k=\frac{2}{\tau}\int_{-\tau/2}^{+\tau/2}\varphi(y)\sin\left(k\,\frac{2\pi y}{\tau}\right)dy.$$

Упомяну еще о написании действительного ряда Фурье в комплексной форме.

Пусть действительная функция $f(x)$ имеет период 2π. Вместо

$$a_k\cos kx+b_k\sin kx$$

можно написать

$$\frac{a_k-ib_k}{2}e^{ikx}+\frac{a_k+ib_k}{2}e^{-ikx}$$

(это, конечно, действительная величина). Обозначим:

$$c_k=\frac{a_k-ib_k}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\,e^{-ikx}\,dx,$$

$$c_{-k}=\frac{a_k+ib_k}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\,e^{ik}\,dx$$

(c_k и c_{-k} — комплексно сопряженные). Тогда

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{ikx}.$$

Это — изящная запись в комплексной форме обычного ряда Фурье, представляющего действительную функцию.

И, наконец, последнее замечание, уже не формальное, а по существу. Оно касается вопроса, который должен возникнуть у каждого.

В прошлый раз было сказано, какие функции можно разлагать в ряд Фурье. Функция $f(x)$ может быть разрывной, но у нее должно быть конечное число разрывов и она не должна иметь бесконечно большого числа максимумов и минимумов (напомню, что при построении периодических функций естественно входят в рассмотрение разрывные функции).

Что значит, что функция $f(x)$ может быть разложена в ряд Фурье? Это значит, что для каждого значения x сумма бесконечного ряда в правой части (1) равна соответствующему значению функции $f(x)$. Но в месте разрыва $f(x)$ имеет два значения. Чему же *здесь* равен ряд Фурье? Вот результат математического исследования: в точках разрыва $x=a$ ряд Фурье дает арифметическое среднее значений $f(x)$ слева и справа:

$$\frac{f(a+0)+f(a-0)}{2}.$$

Таким образом, рядом Фурье задается функция, определенная во всех точках.

Существует ряд приборов, позволяющих осуществить разложение по Фурье. Если начертить периодически повторяющуюся функцию, то определенные приборы — типа планиметра — позволяют последовательно определить ее коэффициенты Фурье. С помощью этих приборов нельзя вычислить бесконечное число членов, но для применений всегда достаточно конечного числа. Есть, например, приборы, вычисляющие 6 коэффициентов. Прибор Майкельсона дает 120 коэффициентов: 60 при синусах и 60 при косинусах. Он позволяет проделать и обратную операцию: суммировать функцию по заданным коэффициентам разложения Фурье. Прибор Майкельсона дает сумму Фурье S_{60}. Это — приближение, и ему соответствует, конечно, непрерывная кривая.

Когда суммируется с помощью прибора конечное число членов разложения Фурье разрывной функции $f(x)$ (например, изображенной на рис. 2), можно ожидать, что получится кривая, которая всюду будет близко подходить к кривой $f(x)$. На деле получается иной результат: апроксимирующая кривая хорошо подходит к $f(x)$ везде, кроме окрестностей мест разрыва; там она образует „хвосты“ (рис. 4), высота которых *не* уменьшается с ростом числа суммируемых членов разложения (она достигает примерно $^1/_{10}$ величины скачка), но в которых с ростом этого числа осцилляции сгущаются и сжимаются к точке разрыва.

Можно подумать, что появление „хвостов" вызвано дефектом прибора, но это неверно. Как показал Гиббс, это — экспериментальное указание на чисто математический факт: неравномерную сходимость ряда Фурье в точках разрыва $f(x)$. Наличие осциллирующих „хвостов" у конечных сумм Фурье около точек разрыва разлагаемой функции получило название *явления Гиббса.*

Перейдем теперь к другому вопросу.

Мы помним, что при сложении гармонических колебаний одинакового периода получается гармоническое колебание с тем же периодом. Теперь речь будет идти о сложении двух гармонических колебаний *неодинакового* периода. Этот случай играет в физике колебаний очень существенную роль, и здесь возникает ряд общих вопросов, которые нужно с самого начала себе уяснить.

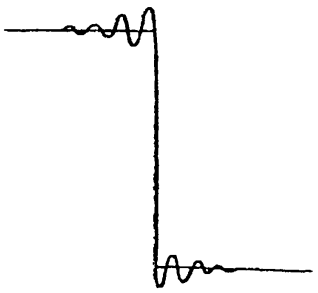


Рис. 4.

Итак, пусть

$$y = a_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2). \quad (4)$$

Периодическая ли это функция? Если ω_1 и ω_2 соизмеримы, т. е. относятся, как целые числа, то y — периодическая функция. Действительно, пусть, например, первое слагаемое имеет период 1/300 сек., а второе — 1/200 сек. Тогда три периода первого слагаемого составляют два периода второго: через 1/100 сек. повторяются значения обоих, а следовательно, повторится и значение суммы.

Но какой смысл имеет в физике говорить о соизмеримости или несоизмеримости? Если, скажем,

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1\,000\,001}{1\,000\,000},$$

то частоты соизмеримы, но y будет повторяться лишь через очень большое число периодов каждого из складываемых колебаний. Другими словами, если отношение частот равно отношению очень больших взаимно простых целых чисел, то физического отличия от случая несоизмеримых частот нет.

Здесь важно другое. Если $\omega_1 \neq \omega_2$, то колебание (4) не может быть представлено как *одно* синусоидальное колебание в точном смысле слова.

Переписав (4) в виде

$$y = a_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + a_2 \cos[\omega_1 t + (\omega_2 - \omega_1) t - \varphi_2], \quad (5)$$

можно показать путем простых вычислений [1], что y можно представить как

$$y = a\cos(\omega_1 t - \varphi), \tag{6}$$

где

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_1 - \varphi_2]}.$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin[(\omega_2 - \omega_1)t - \varphi_2]}{a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos[(\omega_2 - \omega_1)t - \varphi_2]}.$$

Как сказано, (6) не есть гармоническая функция, так как у гармонической функции a и φ по определению являются постоянными величинами.

Интересно, однако, следующее. Пусть $|\omega_1 - \omega_2|$ очень малая величина. В этом случае частота изменения величин a и φ очень мала, поскольку $\cos(\omega_2 - \omega_1)t$ — медленно меняющаяся функция. Величины a и φ меняются медленно, в течение очень долгого времени они почти постоянны и можно рассматривать y как „гармоническое колебание с очень медленно меняющейся амплитудой и с очень медленно меняющейся фазой". Строго говоря, это, конечно, *не* гармоническое колебание. Только при известном легкомыслии можно сказать, что амплитуда и фаза „почти" постоянны.

Возьмем пример. Пусть у нас имеются два камертона, периоды которых немного различаются. Создаваемое ими в некоторой точке суммарное колебание y имеет вид (4) или, что то же, (5). Можно сказать, что складываются два колебания с одинаковым периодом, но с медленно меняющейся разностью фаз. В какой-то момент амплитуда суммарного колебания есть сумма амплитуд $a_1 + a_2$; потом она очень медленно переходит в разность амплитуд $a_1 - a_2$ и т. д.

Можно сказать (и это будет *точно*), что y есть сумма двух гармонических колебаний с несколько отличными периодами. Но можно сказать и так: y есть *одно* колебание с определенным периодом, но амплитуда его медленно меняется от некоторого максимума до некоторого минимума и обратно. Это уже некоторая неряшливость в выражениях. Она вызвана тем, что мы стараемся здесь перенести то, что мы знаем о сложении колебаний с *одинаковыми* периодами, на сложение колебаний с *разными* периодами. Итак, мы говорим: когда звучат оба камертона, возникает тот же тон, что при *одном* камертоне, но с медленно меняющейся фазой

[1] [Ср. 2-ую лекцию, формулы (1).]

и амплитудой. Это явление *биений*. Сведя, таким образом, рассматриваемый случай на прежний, уже известный, мы сразу предвидим, что́ будет наблюдаться.

Мы можем на слух определять направление, откуда приходит звук. Это нам удается не очень хорошо, но все же удается. Существенно при этом то, что мы слышим *двумя* ушами. Может показаться, что мы производим оценку направления по разности интенсивностей в обоих ушах. Для низких тонов это объяснение заведомо неверно. Можно теоретически подсчитать, насколько голова ослабляет звук. Оказывается, что в случае длинных волн ослабление очень мало. Это можно проверить так: прикрыв одно ухо, вы все-таки правильно оцените направление. Повидимому, объяснение следует искать в *разности фаз* между колебаниями, воспринимаемыми каждым ухом. На рис. 5 показано, как получается эта разность фаз.

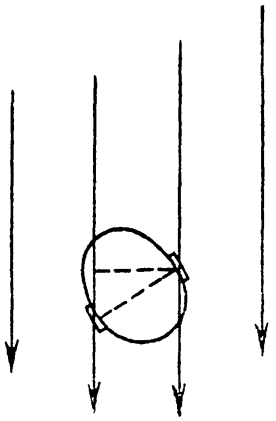


Рис. 5.

Можно проверить это предположение следующим образом. К обоим ушам подводится звук от одного камертона, но по различным путям, и затем меняется разность фаз колебаний, приходящих к обоим ушам. Наблюдатель чувствует при различных значениях разности фаз, что источник находится в направлении, как раз соответствующем задаваемой разности фаз. Но можно сделать иначе. Возьмем два камертона, несколько различных по частоте. Тогда к ушам приходят два колебания с непрерывно изменяющейся разностью фаз, и наблюдатель будет чувствовать, что источник ходит вокруг него. Очевидно, при истолковании этого явления целесообразно говорить, что имеются два колебания с одинаковым периодом, но с изменяющейся разностью фаз, — это не точно, но *целесообразно*.

Способ рассуждения, которым мы пользовались, иногда приемлем. Часть опытов отлично описывается теоретически с помощью представления о меняющейся амплитуде или фазе. Но иногда это представление становится предвзятым и приводит к ошибкам (Флеминг не мог освободиться от взгляда на сумму, как на колебание одного периода, но с меняющейся амплитудой и фазой). Надо знать, когда можно и когда нельзя им пользоваться.

Вообще говоря, им нельзя пользоваться в вопросах резонанса. Сделаем следующий опыт. Мы берем два одинаковых камер-

тона, возбуждаем один из них и затем его останавливаем. Теперь звучит другой камертон: во время звучания первого он возбудился. Теперь мы расстраиваем первый камертон (с помощью нагрузки немного изменяем его период) и снова возбуждаем. После остановки первого камертона второй теперь молчит (вернее, звучит очень слабо). Заставив звучать оба камертона одновременно, мы услышим биения: ведь частоту одного из камертонов мы изменили. Если один (расстроенный) камертон совершает 500 колебаний в секунду, другой 504, то биения происходят 4 раза в секунду. Биения очень хорошо описываются с помощью меняющейся амплитуды. Здесь этот способ рассмотрения вполне пригоден: мы ясно слышим повторяющиеся изменения амплитуды.

Возьмем теперь третий камертон частоты 504 и будем возбуждать сразу первый и второй. Вместе они будут действовать на третий. Колебания первого камертона практически совсем не действуют на третий.

Пользуясь прежним способом рассуждения, мы скажем: колебание от первого и второго камертона есть „колебание с частотой первого камертона, но с переменной амплитудой", и оно не должно поэтому заметно действовать на третий. В действительности же при совместном воздействии первого и второго камертонов третий сильно возбуждается. Таким образом, пользуясь прежним способом рассмотрения, мы пришли в вопросе о действии двух камертонов на третий к неправильному результату. Одно „гармоническое колебание с изменяющейся амплитудой" ведет себя, как два гармонические колебания с неизменными амплитудами. На такие явления натолкнулись, и именно в таких случаях возникает потребность разобраться, *когда* и *почему* можно пользоваться тем или иным упрощенным представлением.

Имеем ли мы право переносить результаты, полученные для *постоянных* a и φ, *на медленно меняющиеся* a и φ? Математика запрещает так поступать: если a и φ не постоянны, тогда то, что выведено для постоянных a и φ, вообще говоря, неверно. Но в природе не бывает строго определенных, строго постоянных величин. Требование абсолютного постоянства тех или иных величин невыполнимо. Физика ставит вопрос по-иному: в какой степени позволительно, чтобы те или иные величины менялись, если мы пользуемся результатами, полученными в предположении, что эти величины постоянны? В физике вопрос часто ставится именно так, и на данном примере я хочу его разъяснить.

Я говорил: „разность частот $|\omega_1 - \omega_2|$ — очень малая величина". Это выражение неряшливо. Более того, оно лишено всякого смысла. Пусть числа колебаний в секунду будут 500 и 502. Мы говорим, что разность этих чисел мала: число 2 мы считаем малым. Это *уже* подозрительно. Числа колебаний в минуту разнятся на 120, но явление от этого не изменяется. А ведь можно взять числа колебаний и за год? Говорить о малости именованных чисел в физике лишено всякого смысла. В одних единицах величина мала, в других — она велика. В физике может иметь значение только малость относительных величин. Только их значения не зависят от выбора единиц.

Имеем ли мы право говорить: „медленно меняющаяся амплитуда"? Имеем, но мы должны сказать, *по отношению к чему* мала частота изменения амплитуды.

Пусть ω_1 и ω_2 — частоты акустических колебаний. Наши уши так устроены, что если отличие частот двух колебаний меньше определенного порога, то мы перестаем их слышать раздельно. Повторяю, это факт физиологический. Если отличие в периодах мало по отношению к 1/10 сек., то в вопросах слуха можно считать, что имеется одно колебание с переменной амплитудой. В опыте же с резонансом была важна малость $|\omega_1 - \omega_2|$ по отношению *к совсем другой* величине — коэффициенту затухания третьего камертона [1]. В приведенных двух примерах важна малость разности частот по отношению к *различным* величинам. Это часто встречающаяся ошибка. Говорят: „такая-то величина мала", и переносят это высказывание на опыт, где играет роль малость по отношению к иным величинам, по отношению к которым она вовсе не мала. Если вы говорите о малости каких-то величин, то, во-первых, вы обязаны указывать, по отношению к чему они малы, и, во-вторых, знать, что в различных вопросах играет роль малость по отношению к *разным* величинам. Всегда нужно знать, *для чего* говорится о малости. В разобранном случае могло быть правильным считать такую-то расстройку малой в вопросах слуха, а в том или ином опыте с резонансом это уже было неправильно.

В радиотелефонии передаваемая речь изменяет амплитуду посылаемого колебания [2]. Для того, чтобы эта „модуляция" повторялась в приемнике без искажения, ее частота должна быть мала

---

[1] [См. 16-ую лекцию.]

[2] [В 1930 г. другие способы модуляции практически еще не применялись.]

не по отношению к частоте немодулированного колебания. Иногда говорят обратное, но это неверно; критерий малости здесь другой. Частота модуляции должна быть мала по отношению к коэффициенту затухания колебательного контура приемника.

Сравним все, что было сказано, с вопросом: что такое разреженный газ? Вопрос сам по себе не имеет смысла. Он приобретает смысл, если сказать, для чего нужен ответ. Теплопроводность не очень разреженного газа почти не зависит от плотности. Но если газ „очень разрежен", то наступают отклонения. Здесь „очень разрежен" означает, что средний пробег молекул велик *по отношению к размерам сосуда*. Понятие „разреженность вообще" не имеет смысла. В достаточно большом сосуде газ не является разреженным, как бы ни была велика длина свободного пробега.

В оптике — совсем другой критерий. Там следует считать, что газ разрежен, если время между столкновениями молекул очень велико *по сравнению со временем затухания* колебаний оптических электронов.

Вернемся к вопросам интерференции. Здесь необходимо еще разобраться в одном кажущемся противоречии с законом сохранения энергии.

Пусть имеется два источника света. В каждой точке пространства квадрат амплитуды определяет проходящую энергию. Колебания от обоих источников складываются, и поэтому, как мы знаем, квадраты амплитуд *не* складываются. Энергия, проходящая в каждой точке, отлична от суммы энергий, которые посылал бы каждый источник в отдельности.

Часто это объясняют следующим образом. В одном месте колебания усиливаются, и здесь энергия больше суммы энергий от отдельных источников, зато в другом месте колебания уничтожаются, и там энергия равна нулю; если проинтегрировать по замкнутой поверхности, то получится сумма энергий, которые посылали бы источники, взятые в отдельности. Это объяснение встречается у Гельмгольца, но оно неправильно. Проинтегрировать по замкнутой поверхности не трудно. Проинтегрируйте — и вы *не* получите сумму энергий, которые посылал бы каждый источник в отдельности. Вернее, вы ее получите только в том случае, когда источники достаточно далеки друг от друга 1) по отношению к длине волны и 2) по отношению к размерам самих источников; в этом случае действительно получается просто перераспределение энергии.

Пусть источники, размер которых мал по сравнению с длиной волны, колеблются в одинаковой фазе, но расстояние между ними меньше половины длины волны. Тогда колебания всюду складываются и энергия *всюду больше* суммы энергий, которые посылали бы источники в отдельности. Получается кажущееся нарушение закона сохранения энергии.

Как всегда в таких случаях, нужно продумать, что это значит. Для того, чтобы источники продолжительно колебались, нужно затрачивать определенную энергию на поддержание их колебаний; уход энергии покрывается работой, совершаемой над источником. Если энергии уходит больше или меньше, чем сумма того, что давали бы отдельные источники, в этом еще нет нарушения закона сохранения энергии. Нарушение было бы, если для поддержания колебаний нужно было затрачивать сумму тех работ, которые требуются в случае отдельных источников. Но ведь нигде не сказано, что внешние силы, раскачивающие электроны (источники света), совершают одинаковую работу и тогда, когда раскачивается отдельно взятый электрон, и тогда, когда этот электрон раскачивается *в присутствии другого*, тоже колеблющегося, электрона. Если энергии излучается больше, то и работы вкладывается больше, и, таким образом, закон сохранения энергии полностью соблюдается.

Аналогичный вопрос встретился и в радиотелеграфии. Речь шла о затухающих колебаниях, которые не поддерживаются извне и уменьшаются вследствие излучения. Пусть совместно излучают две антенны. Затухание — то же самое, что и у одной антенны, а излучаемая энергия может оказаться бо́льше, чем сумма энергий, которые излучались бы отдельными антеннами. Опять противоречие? Но откуда взято утверждение, что затухание то же, что у одной антенны? В действительности затухание каждой антенны вблизи другой меняется и как раз настолько, насколько меняется энергия при совместном излучении обеих антенн.

ПЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(Октябрь 1930 г.)

Почти-периодические функции. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний одинакового периода. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний, имеющих различные периоды. Соизмеримость и несоизмеримость периодов. Радиоприем „посредством биений". Роль нелинейности. Детекторы. Выпрямление. Образование разностного тона. Некоторые методы экспериментального исследования колебаний.

Как мы видели, сумма двух гармонических колебаний с разными периодами не может быть представлена как одно гармоническое колебание. Эта сумма — непериодическая функция, если периоды несоизмеримы. Когда ω_1 и ω_2 близки, сумму можно представить как „гармоническое колебание с переменной амплитудой и переменной фазой". Мы выяснили, при каких условиях можно пользоваться таким представлением.

Примеры явлений, в которых имеет место сложение гармонических колебаний с разными периодами, очень многочисленны. Вот два простых примера: колебание фонаря, подвешенного на пловучем маяке, и колебание языка колокола[1]. Еще один пример: в приливах и отливах мы имеем дело с периодическими силами, обусловленными Солнцем и Луной. Периоды этих сил различны. Возникают биения, — это сизигийные и квадратурные приливы, получающиеся в зависимости от относительного расположения Солнца и Луны. Необходимо отметить, что элементарная статическая теория приливов неправильна. Здесь происходит типично колебательное явление, в котором играет роль весь процесс в целом. Это явление очень похоже на явление резонанса, и для него существенна вся история воздействия[2].

Можно рассматривать суммы конечного числа гармонических колебаний с несоизмеримыми периодами, а потом перейти к сумме бесконечного числа таких гармонических колебаний. Это приводит к новому классу функций, более общих, чем периодические. Фактически к таким функциям подошли с двух различных сторон: исходя из рядов Фурье и отправляясь от определения периодических функций.

Вспомним, что такое периодическая функция[3]. Это функция $f(t)$, обладающая свойством

$$f(t+\tau)=f(t).$$

[1] [См. 26-ую лекцию.]

[2] [См. том V, стр. 436].

[3] [См. 2-ую лекцию.]

Она имеет период τ, а также $n\tau$, где n — любое целое число. Рассмотрим теперь непрерывные функции $f(t)$, обладающие следующим свойством: для сколь угодно малого ε существуют такие „почти-периоды“ $\tau(\varepsilon)$, что

$$|f[t+\tau(\varepsilon)]-f(t)|<\varepsilon,$$

причем таких почти-периодов имеется бесконечно много и они лежат не очень редко, — аналогично тому, как обстоит дело с периодами $n\tau$ ($n=1, 2, 3, \ldots$) периодической функции. Такие функции повторяются, но повторяются не совсем точно. Они называются *почти-периодическими* функциями[1].

Оказывается, что всякую непрерывную почти-периодическую функцию можно апроксимировать суммой гармонических колебаний с (вообще говоря) несоизмеримыми периодами:

$$f(t)\sim\sum_k c_k e^{i\omega_k t}.$$

Взяв достаточно большое число членов, можно получить сколь угодно хорошее приближение в смысле наименьшей квадратичной ошибки. И наоборот, такой ряд всегда представляет собой почти-периодическую функцию.

В физике мы постоянно сталкиваемся с почти-периодическими функциями. Например, смещение определенной точки струны выражается, как функция времени, бесконечным рядом синусоид с (вообще говоря) несоизмеримыми периодами. Это — почти-периодическая функция. Ряд Фурье получается только в том частном случае, когда частоты отдельных слагаемых относятся между собой, как целые числа.

Физика пришла к этим функциям иным путем, чем математика. Математика, определив свойство почти-периодичности, показала, что класс функций, обладающих этим свойством, совпадает с классом функций, которые могут быть представлены в виде ряда гармонических колебаний. Кроме этой основной теоремы, я пока что не нашел в математической теории почти-периодических функций чего-либо, что имело бы очень большое значение для теории колебаний.

Исследуем задачу о сложении двух гармонических колебаний, отличную от той, которую мы рассмотрели раньше, когда скла-

---

[1] [Г. Бор. Почти-периодические функции. М.—Л., 1934.]

дывались движения в одном направлении. Представим себе теперь, что какое-то тело качается в определенном направлении и его смещение есть

$$x = a_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1), \tag{1}$$

а некоторая точка колеблется в перпендикулярном направлении и ее смещение по отношению к этому телу есть

$$y = a_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2). \tag{2}$$

Тогда точка опишет некоторое сложное результирующее движение. Как говорят (не совсем точно), точка одновременно участвует в двух движениях. (Возникает вопрос, можно ли складывать перпендикулярные скорости. Это можно делать, если движение в одном направлении не зависит от движения в другом направлении.)

Уравнения (1) и (2) являются параметрическими уравнениями траектории точки. В случае, когда $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, исключить из них t очень легко. Это можно сделать изящным способом, но можно пойти и лобовым путем: решить уравнения (1) и (2) относительно $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$, как два линейных уравнения с двумя неизвестными, возвести затем полученные выражения в квадрат и сложить. Это даст уравнение траектории в виде

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{2xy}{a_1 a_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{3}$$

Таким образом, траектория представляет собой эллипс с центром в начале координат. С самого начала можно сказать, что эллипс заключен в прямоугольнике

$$x = \pm a_1, \quad y = \pm a_2.$$

Форма же эллипса и то, как он повернут, зависит от разности фаз $\varphi_1 - \varphi_2$. Здесь интересно то, что по направлению осей эллипса можно определить разность фаз.

Пусть

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Тогда

$$\left(\frac{x}{a_2} - \frac{y}{a_2}\right)^2 = 0. \tag{4}$$

Пусть

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm n\pi \qquad (n = 1,\ 3,\ 5, \ldots),$$

тогда

$$\left(\frac{x}{a_1} + \frac{y}{a_2}\right)^2 = 0. \tag{5}$$

Уравнения (4) и (5) — это уравнения прямых, проходящих через начало координат. Таким образом, когда колебания совершаются с одинаковыми или с противоположными фазами, эллипс (3) вырождается в отрезок прямой.

Эти вещи играют фундаментальную роль в оптике при рассмотрении двоякопреломляющих тел. С ними связана целая глава физики — кристаллооптика. В двоякопреломляющих телах световые колебания распространяются с разной скоростью, в зависимости от того, происходят ли они в направлении перпендикулярном или параллельном оптической оси.

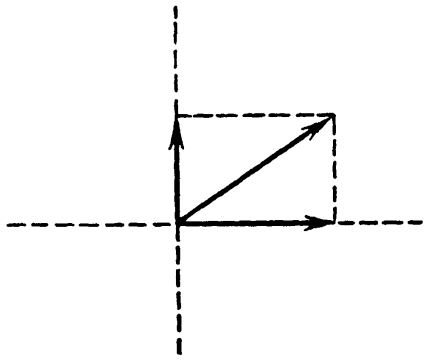


Рис. 6.

Пусть на пластинку (рис. 6) падает прямолинейно поляризованный свет. Скорости распространения двух взаимно перпендикулярных составляющих колебания различны, и они выйдут из пластинки с различными фазами. Значит, луч выйдет из пластинки (вообще говоря) эллиптически поляризованным. Таким образом, пластинка превращает прямолинейно поляризованный луч в эллиптически поляризованный.

В частном случае, когда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm\frac{\pi}{2},$$

имеем из (3):

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1,$$

т. е. эллипс с главными осями, направленными по осям x и y. Если, кроме того, $a_1 = a_2$, то получается окружность. Таким путем получают свет, поляризованный по кругу.

Посмотрим, что будет, если частоты ω_1 и ω_2 не равны друг другу, но разность их очень мала. Для глаза это значит, что

числа колебаний в секунду отличаются меньше, чем, скажем, на 10. Мы можем тогда сказать, что имеются два колебания с одинаковой частотой, но разность фаз между ними медленно меняется. Эллипс не будет неподвижен, а будет медленно поворачиваться. Получается последовательная смена тех картин, которые соответствуют разным $\varphi_1 - \varphi_2$ и о которых мы только что говорили.

Пусть теперь частоты ω_1 и ω_2 разнятся как угодно. Здесь интересно следующее. Математика показывает, что если частоты соизмеримы, то получается замкнутая кривая, если несоизмеримы — незамкнутая. Но ведь физика ничего не знает о соизмеримых или несоизмеримых числах, в физике это различие не играет роли... Получается так, будто бы я только что указал на различие между обоими случаями, а теперь от этого отказываюсь. Позвольте привести аналогию.

Химики мне не простят, если я скажу, — а я это скажу, — что закон кратных отношений в общепринятой формулировке не имеет никакого смысла. Пусть соединяются элементы A и B. Тогда, как говорят обычно, B вступает в реакцию с заданным количеством элемента A в количествах, относящихся между собой, как целые числа. Говорят иными словами, что эти количества элемента B всегда соизмеримы. Я утверждаю, что это высказывание не имеет содержания: задав любые соизмеримые числа, всегда можно подобрать такие, близкие к ним, несоизмеримые числа, что нельзя будет различить одни от других. Что же имеет в виду химия? Что количества элемента B, соединяющиеся с данным количеством элемента A, относятся между собой, как *малые* целые числа. Но что такое малые числа? Подходят ли, например, числа 5 или 6? Где здесь надо остановиться? Точно сформулировать закон кратных отношений очень трудно.

Итак, при несоизмеримых периодах получается незамкнутая кривая. Она подходит как угодно близко к любой точке внутри прямоугольника, она заполняет его „всюду плотно“. Но кто запрещает рассуждать в случае несоизмеримых частот так, как если бы они были соизмеримы? Если мы заменим нерациональное отношение ω_1/ω_2 близким рациональным, физические результаты не могут измениться скачком. И действительно, оба подхода дают практически одно и то же. Весь вопрос в том, через сколько времени заканчивается опыт. В течение ограниченного промежутка времени я могу рассматривать дело так, как будто частоты

соизмеримы. Скажем, через год кривая покроет всю площадь прямоугольника, но на опыте, если отношение частот близко к рациональному отношению 1:1, мы увидим эллипс. Качественное различие здесь практически не существенно из-за медленности изменения формы эллипса.

Если отношение периодов равно 1:2, 2:3, 1:4 и т. д., получаются замкнутые кривые самого разнообразного типа. В зависимости от фазовых соотношений получаются различные картины

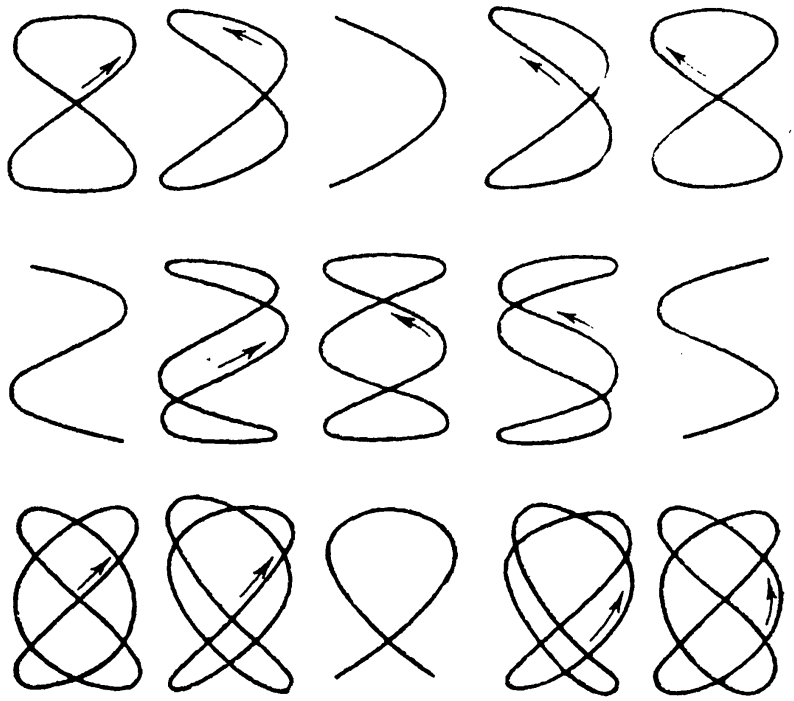


Рис. 7.

(фигуры Лиссажу); например, такие, как показано на рис. 7. Можно по фигуре узнавать отношение частот. Его можно установить по отношению чисел точек касания кривой к сторонам прямоугольника, в который она вписана.

Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний можно продемонстрировать с помощью двойного маятника, к которому подвешена воронка с песком (правда, здесь движения не совсем независимы).

На этом вопрос о сложении колебаний мы будем считать законченным. Перейдем теперь к вопросу о выпрямлении колебаний.

Допустим, что имеется радиостанция, посылающая незатухающую волну высокой частоты 100 000 герц, — частоты, находящейся далеко за пределом слышимости. Мы принимаем это коле-

бание, но ничего не слышим. Пусть теперь на месте приема имеется источник колебаний близкой частоты, скажем 100 500. Тогда мы слышим в телефоне разностный акустический тон частоты 500. Если же работает только передатчик или только местный генератор (так называемый гетеродин), то ничего не слышно. Это было замечено, и в результате появился чрезвычайно удобный способ приема колебаний, оказавшийся к тому же чрезвычайно чувствительным. Этот способ приема сделался одним из самых распространенных. Его еще не так давно зачастую объясняли следующим образом: происходят *биения* 500 раз в секунду, и мы слышим эти биения как тон.

Это неверно. Если в приемнике *есть* гармоническое колебание с частотой 500, то вы услышите соответствующий тон. Если такого колебания в приемнике *нет*, то этого тона вы не услышите. Пусть в приемнике имеются колебания только с частотами 100 000 и 100 500. Происходят биения, но *нет* гармонического колебания с частотой 500. Следовательно, мы ничего не услышим. Поэтому употребляемое название „прием методом биений" неправильно.

В объяснении, которое я привел, забыто одно обстоятельство, — то, что имеется *детектор*. Его роль в приемнике — самая существенная. Более того, освободиться от детектирования нелегко: всякий плохой контакт есть детектор, так как при загрязнении место контакта не подчиняется закону Ома.

Наводимая в контуре приемника электродвижущая сила имеет вид

$$e = a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t, \tag{6}$$

причем в нашем конкретном случае $\omega_1/2\pi = 100\,000$, $\omega_2/2\pi = 100\,500$.

Если контур подчиняется закону Ома, в нем будет течь ток, пропорциональный (6). На практике мембрана телефона за таким током не уследит. Но пусть даже удалось построить такую „мембрану", которая будет заметно колебаться под действием тока высокой частоты (это не безнадежно: я имею в виду пьезокварц). Смещение такой мембраны будет иметь вид

$$x = \frac{a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t}{w},$$

где w — некоторая постоянная. Здесь *нет* акустической частоты.

В детекторе зависимость тока от напряжения не следует закону Ома. (Вся радиотехника основана на проводниках, не

подчиняющихся закону Ома, как в передающих устройствах, так и в приемниках. Найдите новый проводник, не подчиняющийся закону Ома,и вы сможете сказать, что вы сделали открытие в радиотехнике). В детекторе

$$i = f(e),$$

где $f(e)$ — некоторая нелинейная функция (характеристика детектора).

Существуют и механические системы, обладающие аналогичным свойством, например механическая система уха. Барабанная перепонка уха связана с тремя костями (молоточек, наковальня и стремя). Они соединяются с лабиринтом. Смещение перепонки не пропорционально силе. Если на нее действует сила в одном направлении, то смещение имеет другую величину, чем при силе такой же величины, действующей в противоположном направлении.

Будем говорить о кристаллическом детекторе. В нем используются гален (свинцовый блеск), пирит и другие кристаллы. Электродвижущие силы одной и той же величины, но разного направления, создают в детекторе токи различной силы, иногда даже различного *порядка* величины. (Теперь в качестве детектора употребляется катодная лампа. В ней в вакууме находятся раскаленная нить и холодный анод. Такое устройство в одном направлении пропускает ток, а в другом совсем не пропускает).

Примем определенный вид характеристики детектора. Многие явления можно охватить следующей простой характеристикой:

$$i = \alpha e + \beta e^2. \tag{7}$$

Пусть

$$e = \cos \omega t.$$

Если бы был верен закон Ома, то такая гармоническая электродвижущая сила создавала бы гармонический ток (средний ток был бы равен нулю) и гальванометр постоянного тока ничего бы не показал. Если же зависимость между i и e дается формулой (7), то

$$i = \alpha \cos \omega t + \beta \cos^2 \omega t = \alpha \cos \omega t + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} \cos 2\omega t,$$

т. е. ток имеет совсем другой вид, чем e. В нем присутствует прежнее гармоническое колебание частоты ω, но, кроме того, имеется постоянная слагающая и гармоническое колебание двой-

ной частоты. Если наши аппараты не откликаются на частоту ω, то тем более они не будут откликаться на частоту 2ω: включив в цепь детектора телефон, мы ничего не услышим. Но если ток i протекает через аппарат, реагирующий на постоянный ток, например гальванометр, то мы получим отклонение. Поэтому говорят о *выпрямлении*. Взятая нами характеристика (7) несимметрична: для положительных значений e оба члена имеют один знак (если α и β положительны), для отрицательных — разные знаки. Все дело в этой несимметричной „податливости". В результате получается детектор (в смысле „обнаружитель") и выпрямитель.

Но гораздо более интересен вопрос о том, что происходит, если к детектору подводится сумма двух гармонических колебаний разного периода, т. е. электродвижущая сила вида (6). Тогда

$$i = \alpha(a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t) + \\ + \beta(a_1^2 \cos^2 \omega_1 t + a_2^2 \cos^2 \omega_2 t + 2a_1 a_2 \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t). \qquad (8)$$

Здесь все члены, кроме последнего, дают то, что мы уже знаем. Член с произведением косинусов дает нечто новое. Его можно представить в виде

$$\beta a_1 a_2 [\cos(\omega_1 - \omega_2) t + \cos(\omega_1 + \omega_2) t].$$

Второе слагаемое имеет в нашем конкретном случае высокую частоту 200 500, но первое слагаемое имеет *низкую* частоту 500, равную разности частот подводимых колебаний. Это гармоническое колебание звуковой частоты, и мембрана телефона будет колебаться гармонически с частотой 500. Никаких биений в (8) нет, а есть *настоящее* гармоническое колебание с разностной частотой, *возникшее* благодаря детектору. Оно создается детектором из двух колебаний с высокими частотами.

Все, что было сказано, справедливо потому, что колебания мембраны телефона в приемнике очень малы. Как я сказал, ухо само обладает нелинейной характеристикой. Пусть на ухо действуют *сильные* звуки частоты 10 000 и 10 500. Тогда в ухе возникает колебание частоты 500, и мы слышим разностный тон. Но это опять не биения, а образование колебания разностной частоты, так как само ухо является детектором. При идеальной линейности характеристики уха мы не услышали бы тона частоты 500. К этому необходимо добавить, что для очень сильных звуков уже заметно нелинейны уравнения колебаний воздуха и разностные тоны могут возникнуть из-за того, что сам *воздух* является детектором.

Мы видим, насколько существенны детекторы. Детекторы — проводники, не подчиняющиеся закону Ома, — дают мощное средство исследования колебаний, переводя частоты из одной области значений в другую область.

Что будет, если взять детектор с другими свойствами, например с характеристикой, изображенной на рис. 8? Выпрямления уже не получится. Такой антисимметричный детектор $[i(-e)=-i(e)]$ создает колебания тройной частоты [1].

Коснемся коротко некоторых практических задач, возникающих в ряде случаев, когда мы имеем дело с колебаниями. Основные задачи таковы:

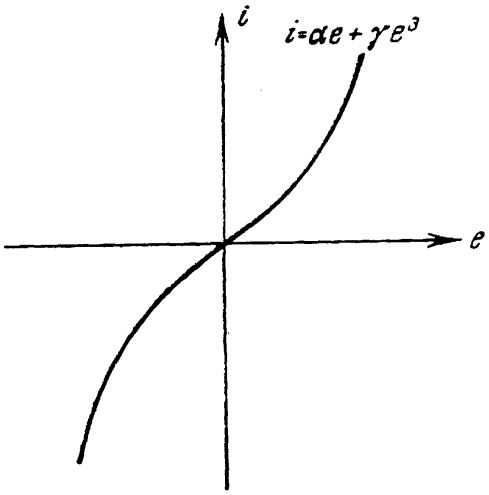


Рис. 8.

1. Приходят колебания, нужно их обнаружить (независимо от частоты и формы).

2. Нужно узнать, имеются ли колебания данной частоты.

3. Нужно узнать всю форму колебаний. Это иногда очень важно.

Для того, чтобы знать, как строить приборы для решения этих задач, нужно знать теорию колебаний, — то, о чем будет речь впереди.

Часто для изучения колебаний к колеблющемуся телу прикрепляется зеркальце. Отраженный от него пучок света можно развернуть путем вращения другого зеркала. Световой луч практически не имеет инерции; он следует за движением зеркальца. Но если попытаться изучить таким способом быстрые колебания воздуха, ничего хорошего не получится. Инерция зеркальца исказит форму колебания. Но существуют приспособления, позволяющие изучать колебание, почти не искажая его формы. Они основаны на использовании катодного пучка. Катушка с током отклоняет его, и светлая точка (конец пучка) чертит движение. Такой катодный осциллограф позволяет записать чрезвычайно быстрые изменения, происходящие, например, за одну десятимиллионную секунды. При этом точка смещается горизонтально на один миллиметр за одну десятимиллионную секунды. Для того, чтобы

[1] [С. М. Рытов. Журн. техн. физики, 2, 972, 1932.]

осуществить такую быструю развертку в механической системе, потребовались бы колоссальные силы.

Часто требуется определить разность частот двух колебаний. Например, одно колебание имеет частоту 500, частота другого неизвестна. Чтобы ее узнать, наблюдают число биений. Пусть, например, происходят два биения в секунду. Тогда второе колебание имеет частоту 502 или 498. Подумайте, как узнать, которую из них?

Есть очень изящный способ изучения периодических явлений — стробоскопический способ. Мы хотим определить, сколько оборотов в секунду совершает колесо. Будем освещать его короткими вспышками через диск с вырезами. Пусть, скажем, колесо делает 100 оборотов в секунду и число вспышек за секунду также равно 100. При этом вспышки будут освещать колесо только в такие моменты, когда начерченная на нем линия (рис. 9) находится в каком-нибудь определенном, например вертикальном, положении. Мы будем видеть колесо так, как будто оно стоит на месте. Если давать вспышки немного чаще, то будет казаться, что колесо медленно вращается в сторону, обратную его истинному движению. Если вспышки следуют одна за другой медленнее, чем 100 раз в секунду, то видимая картина будет медленно поворачиваться по ходу колеса. Таким способом можно искусственно замедлить весь процесс.

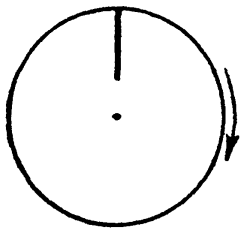


Рис. 9.

Таким же образом можно узнать, как светит источник света, например неоновая лампочка, — вспышками или непрерывно. Будем махать палкой. Если происходят вспышки, то они застают ее в определенных положениях, и мы видим ряд раздельных положений палки — веер.

Вернемся к опыту с вращением. Если вспышки следуют вдвое чаще, чем период вращения колеса, то они будут заставать его в двух различных положениях. Если вращать разноцветный диск, то цвета сливаются. Но при стробоскопическом освещении они восстанавливаются.

Применение стробоскопических методов имеет существенное значение для определения динамических деформаций частей машин.

ШЕСТАЯ ЛЕКЦИЯ

(24/X 1930 г.)[1]

Теория колебаний маятника, данная Галилеем. Теория колебаний маятника, основанная на законе сохранения энергии. Роль маятника в истории физики. Гармонические колебания механических систем, в которых сила определяется упругими деформациями. Колебания в контуре, обладающем емкостью и индуктивностью. Общие замечания о колебаниях около устойчивого положения равновесия. Кажущееся однообразие электрических колебательных систем.

Мы приступаем теперь к рассмотрению систем, совершающих гармонические колебания. Применив к некоторым физическим системам основные законы механики или электричества, мы обнаружим, что в силу этих законов рассматриваемые системы совершают гармонические колебания.

Начнем с наиболее простых систем. Но прежде всего, что значит „простая" система? Если мы возьмем абсолютно жесткий маятник, то для того, чтобы вполне определить его положение, нужно знать *одну* величину. Такие системы называются системами с одной степенью свободы (заметим, что если можно определить положение системы заданием одной величины, то его можно определить также заданием какой-нибудь функции от этой величины).

Но такое рассмотрение всегда является идеализацией. В природе не существует систем с одной степенью свободы. Жестких тел не существует. Чтобы полностью определить положение тела, следовало бы, строго говоря, задать положения всех его молекул. Но и этого может быть недостаточно (вспомним о волновой механике). В наших рассуждениях нам часто приходится отступать от строгости. Если бы науку с самого начала развивали такие строгие и тонкие умы, какими обладают некоторые современные математики, которых я очень уважаю, то сложность не позволяла бы двигаться вперед.

Итак, будем говорить об одной степени свободы.

Как движется маятник? Что значит ответить на этот вопрос? Речь может идти о двух вещах:

1) о практическом, экспериментальном изучении;

2) о теоретическом изучении на основании общих, уже установленных закономерностей.

---

[1] [Точные даты предшествующих лекций не установлены.]

Мы выберем второй путь и будем опираться при этом на закон сохранения энергии, который содержит высказывания очень общего характера. Нужно, однако, иметь в виду, что такой ход идей — от закона сохранения энергии „вниз" к маятнику — нарушает историческую перспективу. Как раз на маятнике был найден механический закон сохранения энергии. Его высказал в связи с маятником Гюйгенс.

Я кратко изложу развитие теории маятника.

Уже до Галилея было найдено, что период маятника при малых амплитудах не зависит от амплитуды (изохронизм малых качаний). Этот закон снова открыл Галилей. Для нас несущественно, рассматривается ли маятник как материальная точка, но в свое время это было существенно. Галилей уже знал, что в случае, когда маятник можно рассматривать как материальную точку, период τ пропорционален $\sqrt{l}$ (l — длина маятника).

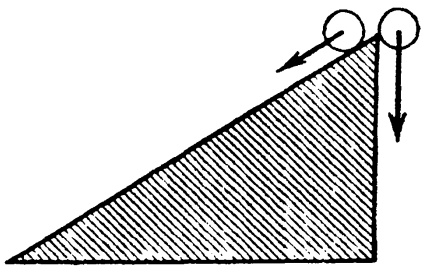


Рис. 10.

Путь, которым шел основатель динамики Галилей, можно восстановить из его „Диалогов". Будем идти примерно (но не совсем) по стопам Галилея.

Галилей изучал движение точки по наклонной плоскости. При этом он не пользовался маятником, а измерял время по истечению воды из сосуда и количество вытекшей воды считал пропорциональным времени. Галилей установил, что ускорения при движении по гипотенузе (рис. 10) и при свободном падении относятся друг к другу, как вертикальный катет к гипотенузе. Отсюда следует, что шарик, пущенный из верхней точки A окружности по секущей (рис. 11), придет на окружность через время, не зависящее от выбора секущей. Отсюда следует также, что шарик, пущенный с окружности по секущей, идущей в нижнюю точку B (рис. 12), приходит в нее через время, не зависящее от выбора секущей. Галилей исходил из этого и рассуждал так: при малых качаниях маятника дугу можно заменить хордой, и маятник движется по хорде, как по наклонной плоскости. Тогда, если t — время падения через весь вертикальный диаметр (рис. 13), то

$$2l = \frac{gt^2}{2},$$

откуда

$$t=2\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Период τ малого колебания равен, следовательно, учетверенному времени падения по хорде:

$$\tau=8\sqrt{\frac{l}{g}},$$

независимо от того, откуда пущен маятник.

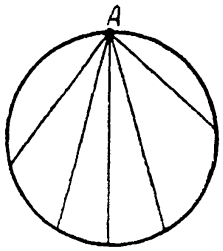


Рис. 11.

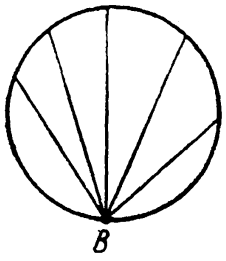


Рис. 12.

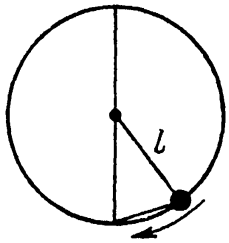
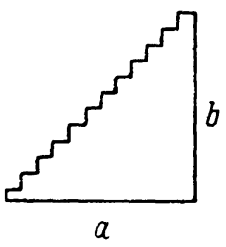


Рис. 13.

Из этого рассуждения получается, что малые колебания обладают свойством изохронизма. Из него получается также, что период пропорционален $\sqrt{l}$, но *не* получается правильного значения коэффициента пропорциональности: он равен в действительности 2π, а не 8.

Мы видим, сколь опасно сделанное упрощение: как бы ни была мала дуга, важна кривизна пути. Нельзя переменный наклон



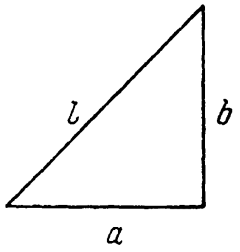


Рис. 14.

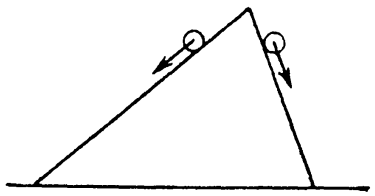


Рис. 15.

заменять средним наклоном. Вот аналогичный пример: замена прямой ломаною (рис. 14) в пределе правильно дает площадь, но не длину; длина получается равной $a+b$, а не l.

У Галилея уже есть намек на закон сохранения энергии. Галилей пользовался предположением, что если материальные точки движутся по двум наклонным плоскостям (рис. 15), то на одном и том же горизонтальном уровне их скорости всегда одинаковы.

Задача о физическом маятнике (рис. 16) занимала почти всех выдающихся математиков того времени. При решении этой задачи Гюйгенс пришел к одной из первых формулировок закона сохранения энергии в механике[1]. Исследование Гюйгенса намного переросло частную задачу о маятнике. Современная трактовка задачи на основе закона сохранения энергии такова.

Кинетическая энергия физического маятника есть

$$T=\sum\frac{mv^2}{2}.$$

Здесь m — массы материальных точек; v — их скорости (вместо суммы можно написать интеграл). Далее

$$v=r\dot{\varphi}$$

и

$$T=\sum\frac{mr^2}{2}\cdot\dot{\varphi}^2=\frac{I\dot{\varphi}^2}{2}$$

(I — момент инерции).

Потенциальная энергия есть

$$U=Pl(1-\cos\varphi).$$

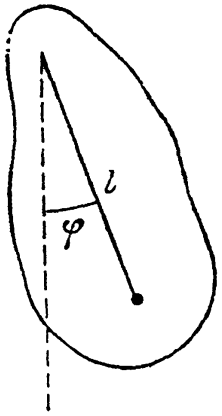


Рис. 16.

На основании закона сохранения энергии

$$T+U=\frac{I}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+Pl(1-\cos\varphi)=C'^2, \qquad (1)$$

где C'^2 — постоянная. Это — дифференциальное уравнение движения маятника. Оно нелинейно. Ограничимся случаем, когда φ настолько мало, что можно пользоваться приближением

$$\cos\varphi=1-\frac{\varphi^2}{2}.$$

Тогда вместо (1) можно написать приближенно:

$$\frac{I}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\frac{Pl}{2}\varphi^2=C'^2.$$

Обозначив

$$\frac{2C'^2}{Pl}=C^2,$$

---

[1] [Х. Гюйгенс. Три мемуара по механике. Изд-во АН СССР, 1951.]

получаем:

$$\frac{I}{Pl}\dot{\varphi}^2 + \varphi^2 = C^2,$$

откуда

$$\varphi = C\cos(\omega t + \psi),$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{Pl}{I}}.$$

Для математического маятника массы m и длины l

$$I = l^2 m, \quad P = mg, \quad \tau = 2\pi\sqrt{l/g}.$$

Период совершенно определенным образом зависит от параметров системы. Он не зависит от начальных условий. Но фаза ψ и амплитуда C произвольны. Это величины, определяемые не системой, а данными опыта, так называемыми начальными условиями.

Какие предположения были нами сделаны?

1. Предположение о том, что других видов энергии, кроме записанных в (1), здесь не существует. Это значит в частности, что мы пренебрегаем трением.

2. Предположение о том, что маятник совершает *малые* колебания. При этом кинетическая энергия равна постоянной, умноженной на $\dot{\varphi}^2$, а потенциальная энергия — постоянной, умноженной на φ^2.

Возьмем какую угодно систему, кинетическая и потенциальная энергии которой имеют именно такой вид: постоянная $\times\dot{\varphi}^2$ и постоянная $\times\varphi^2$ (φ — координата системы). Такая система будет совершать синусоидальные колебания. Это математически следует из вида выражения для энергии, и мы с этим встретимся в ряде других примеров.

Но, решая уравнение (1), мы допустили некоторую неточность. Дело в том, что уравнение (1) имеет еще одно решение, а именно $\varphi = \text{const}$. Из закона сохранения энергии нельзя вывести, что если отклонить маятник и затем отпустить его, то он не будет оставаться в покое в отклоненном положении. Существование дополнительного решения $\varphi = \text{const}$ — недостаток этого способа рассмотрения. Второй закон Ньютона дает более определенный ответ: на тело действует сила, отличная от нуля; следовательно, тело имеет ускорение и φ не может быть постоянным. Закон

сохранения энергии дает ответ на вопрос о том, *как* движется маятник, если *известно*, что он не остается в покое. Для систем с несколькими степенями свободы закон сохранения энергии не может дать и этого.

В неизданных при жизни рукописях Галилея содержится предложение использовать маятник в качестве регулятора хода часов.

Маятник сыграл чрезвычайно большую роль в истории физики. Как известно, он может служить для определения ускорения тяжести g — одной из самых важных „естественных" величин.

Рише в 1774 г. провел сравнение значений g в Париже и Кайенне. Эти значения получились различными, что объясняется вращением и формой Земли.

С помощью качаний маятника g может быть измерено до седьмого знака. Для этого пользуются так называемым оборотным маятником, причем приходится вносить поправки на трение и на архимедову подъемную силу.

Бессель использовал маятник для того, чтобы с большой точностью проверить пропорциональность инертной и тяжелой массы. Уже Ньютон отлично знал, что закон качания маятника (независимость периода от массы) справедлив лишь в том случае, если тяжелая масса пропорциональна инертной. С доступной ему точностью он показал на опыте, что эти величины пропорциональны одна другой. Бессель доказал это с гораздо большей точностью — до 1/60 000. Он исследовал вещество метеоритов, воду и другие материалы.

Впоследствии Этвеш подтвердил, что все тела имеют одно и то же g, с точностью $5 \cdot 10^{-8}$ (но не с помощью маятника). Эйнштейн возвел это в постулат общей теории относительности.

Пусть мы находимся в лифте. Все тела в нем давят вследствие притяжения Земли. Представим себе, что притяжение отсутствует, тогда давления нет. Но пусть лифт движется ускоренно вверх. Тогда, согласно постулату Эйнштейна, тела давят точно так же, как и в том случае, когда действует притяжение Земли. Если бы g для различных тел было различным, этого не могло бы быть.

Явление, которое исследовали Ньютон и Бессель с помощью маятника, привело к общей теории относительности.

Громадная точность, с которой измеряется период качания маятника, достигается методом совпадений. Пустим маятник вместе с часами. Мало-помалу они разойдутся. Пусть, например, маятник

часов имеет период 1 секунду и 1000 колебаний часов совпадают с 1001 колебаниями маятника. Тогда мы знаем, что за 1001 колебание маятника прошло 1000 секунд, и отсюда находим период маятника.

Типичными механическими системами, совершающими гармонические колебания, являются такие, в которых силы определяются упругими деформациями.

Если для балки (рис. 17) справедлив закон Гука, то сила пропорциональна прогибу:

$$h = \alpha P$$

(h — прогиб; P — вес груза; α — постоянная).

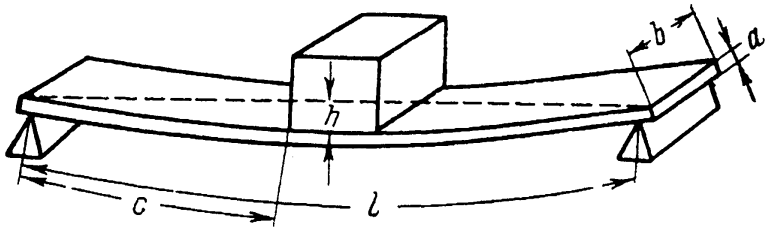


Рис. 17.

Если действует сила, пропорциональная смещению из положения равновесия:

$$F = -kx,$$

то потенциальная энергия будет

$$U = \frac{kx^2}{2}.$$

Если на тело, которое может вращаться около оси, действует момент сил, пропорциональный угловому смещению:

$$M = -K\varphi,$$

то потенциальная энергия будет

$$U = \frac{K\varphi^2}{2}.$$

В нашем случае (рис. 17) потенциальная энергия

$$U = \frac{kh^2}{2} - Ph$$

(второй член появился вследствие того, что на груз действует еще сила тяжести). Пренебрежем кинетической энергией балки. Кинетическая энергия груза равна

$$T = \frac{M\dot{h}^2}{2},$$

и, следовательно, полная энергия системы будет

$$E = T + U = \frac{M\dot{h}^2}{2} + \frac{kh^2}{2} - Ph.$$

Легко привести это выражение к прежнему виду (сумма квадратов) заменой

$$x = h - \frac{P}{k},$$

откуда

$$\dot{x} = \dot{h}.$$

Тогда

$$E = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} - \frac{P^2}{2k}.$$

Закон сохранения энергии дает:

$$\frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = C'^2,$$

и, следовательно,

$$x = C\cos(\omega t + \psi),$$

причем частота

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}.$$

Здесь также период строго определен, если определена сама рассматриваемая система.

В технике нас интересует, как k связано с константами балки. Теория упругости дает:

$$k = \frac{la^3bE}{4c^2(l-c)^2},$$

где E — модуль Юнга материала балки, а a, b, c и l — геометрические параметры, указанные на рис. 17. Таким образом, если балка дана, то, подставив числа, можно рассчитать частоту колебаний.

Рассмотрим еще случай кручения. Пусть имеется (рис. 18) стержень круглого сечения с диском на конце. Здесь

$$U=\frac{K\varphi^2}{2}, \qquad T=\frac{I\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Уравнение колебаний есть

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2}+\frac{K\varphi^2}{2}=C'^2,$$

так что здесь опять получается гармоническое колебание. Частота его равна

$$\omega=\sqrt{\frac{K}{I}}.$$

Согласно теории упругости

$$K=\frac{G\pi r^4}{2l},$$

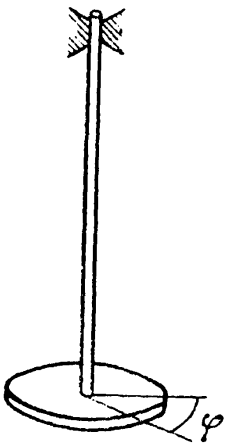


Рис. 18.

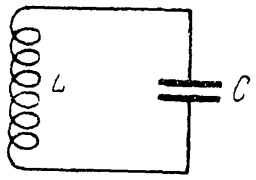


Рис. 19.

где G — модуль сдвига материала стержня, r — радиус его сечения, l — его длина. В случае спиральной пружины K тоже имеет очень простое выражение.

Во всех случаях, когда действуют упругие силы, подчиняющиеся закону Гука, имеют место изохронные гармонические колебания, т. е. колебания с периодом, зависящим только от системы, но не от начальных условий.

Возьмем теперь электрическую систему, состоящую из емкости C и индуктивности L (рис. 19). Электрическая энергия есть

$$W_e=\frac{Q^2}{2C},$$

где Q — заряд конденсатора, а магнитная энергия

$$W_m=\frac{Li^2}{2}=\frac{L\dot{Q}^2}{2},$$

где $i=\dot{Q}$ — сила тока. Если отвлечься от сопротивления, как мы это делали раньше, то закон сохранения энергии дает:

$$\frac{Q^2}{2C}+\frac{L\dot{Q}^2}{2}=C'^2.$$

Таким образом, здесь тоже происходят гармонические колебания с периодом

$$\tau=2\pi\sqrt{LC}.$$

Это — знаменитая формула Томсона.

Математическое условие гармоничности колебаний может быть сформулировано так: потенциальная энергия должна быть положительна и должна квадратично зависеть от координаты (кинетическая энергия всегда положительна и квадратична по скорости).

Положительность потенциальной энергии — достаточное условие устойчивости равновесия. В общем случае

$$U=f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots \qquad (2)$$

В положении устойчивого равновесия U имеет минимум: если немного вывести систему из состояния устойчивого равновесия, она не может в этом случае далеко уйти, так как сумма кинетической и потенциальной энергий остается постоянной, причем обе эти величины положительны. Совсем иначе обстоит дело, если U имеет максимум. По мере роста x кинетическая энергия увеличивается и система все более удаляется от состояния равновесия.

Можно поместить начало координат в положение равновесия. Если $x=0$ является устойчивым положением равновесия, то, как сказано, в этом положении U имеет минимум, для чего необходимо

$$a_1=0, \quad a_2>0.$$

Если система выведена из состояния устойчивого равновесия, то при малых отклонениях, когда можно пренебречь высшими членами разложения (2), она совершает гармонические колебания.

Все разобранные нами примеры являются частными случаями таких колебаний около устойчивого положения равновесия.

Эти примеры могут создать впечатление, что механические колебательные системы очень разнообразны, а электрические — крайне однообразны: в них всегда „одно и то же“—конденсатор и катушка самоиндукции. Это—*кажущееся* однообразие. Различие

между плоским и цилиндрическим конденсатором — такое же, как между балкой и закрученным стержнем. Коэффициент k в механике обычно раскрывается, а в электрических колебаниях нашли удобным раз навсегда назвать параметр, аналогичный $1/k$, емкостью. Разнообразие электрических систем скрыто в том, как выражаются C и L через параметры, характеризующие геометрическую конфигурацию конденсатора и катушки.

СЕДЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(27/X 1930 г.)

Примеры механических колебательных систем. Вал с двумя дисками и его электрическая модель. Осторожность, необходимая при идеализациях. Пример Борела. „Неестественные" начальные условия в случае груза, висящего на пружине. Электрическая аналогия этого случая. Качественное исследование движений нелинейной консервативной системы с одной степенью свободы с помощью интеграла энергии: неограниченное одностороннее движение, либрационное движение, лимитационное движение. Применение общей теории к гармоническому осциллатору и к маятнику.

Зависимость периода гармонических колебаний от параметров системы играет важную роль во многих технических и физических измерениях, например: в определении моментов инерции тел, в измерении магнитных полей. Если известен момент инерции магнита, то из результатов исследования его колебаний в магнитном поле можно найти в отдельности произведение магнитного момента на поле и отношение магнитного момента к полю и вычислить по этим данным магнитное поле. Этим способом Гаусс определял напряжение магнитного поля Земли.

Вопросы, относящиеся к периоду колебаний, играют важную роль в машиностроении. Часто случается, что центр тяжести вращающейся массы машины немного смещен по отношению к оси вращения. При вращении развивается центробежная сила, периодически действующая на ось. Когда период вращения совпадает с периодом собственных колебаний системы, состоящей из машины и фундамента, на котором она укреплена, то развиваются опасные явления: колебания усиливаются. Это явление носит название резонанса.

Можно множить до бесконечности примеры систем, совершающих гармонические колебания. Остановимся на одном из них. Представим себе, что в Земле просверлен канал, проходящий через ее центр, и что в этом канале находится тяжелое тело. Легко доказать, что действующая на него сила пропорциональна расстоянию от центра Земли. Это соответствует гармоническому колебанию; его период — около 42 минут. Конечно, это шутка, но вы знаете, что Дж. Дж. Томсон положил подобную модель в основу своей теории атома. Согласно этой модели атом — шар, равномерно заряженный по всему объему положительным электричеством, внутри которого колеблются отрицательные заряды — электроны. Известно теперь, что эта модель глубоко, принципиально неправильна, но в свое время она сыграла большую роль.

Рассмотрим еще один пример, на котором мы убедимся, как мне кажется, в пользе рассмотрения колебательных вопросов с общей точки зрения. Попутно я хотел бы спросить, что для вас нагляднее: механические или электрические схемы? Кельвин говорил: „Я могу сказать, что я понял явление, если я могу составить для него механическую модель". Многие современные физики сказали бы обратное: „Я понимаю механическое явление, если я создал для него электрическую модель".

Представим себе два диска, соединенные стержнем (как сказал бы физик) или валом (как сказал бы техник). Эта система имеет две степени свободы: во-первых, диски могут вращаться вместе, как твердое тело; во-вторых, они могут поворачиваться друг относительно друга и закручивать стержень. Рассчитаем движение такой системы. Ее кинетическая энергия

$$T=\frac{I_1\dot{\varphi}_1^2}{2}+\frac{I_2\dot{\varphi}_2^2}{2},$$

где I_1, I_2 — моменты инерции дисков; φ_1, φ_2 — их углы поворота. Потенциальная энергия U зависит только от разности $\varphi_1-\varphi_2$:

$$U=\frac{k(\varphi_1-\varphi_2)^2}{2},$$

причем коэффициент k характеризует упругость стержня при кручении.

Представим себе, что мы скрутили систему и пустили ее. Тогда движение будет совершаться под действием одних только

внутренних сил. При этом справедлив закон моментов количества движения:

$$I_1\dot{\varphi}_1 + I_2\dot{\varphi}_2 = \text{const}.$$

Если в начальный момент система была в покое, то const $=0$ и

$$I_1\varphi_1 + I_2\varphi_2 = \text{const}'.$$

Если теперь мы условимся отсчитывать углы так, чтобы для $t=0$ было

$$I_1\varphi_1 + I_2\varphi_2 = 0, \tag{1}$$

то это уравнение будет оставаться верным для произвольного t. Уравнение (1) — это простое алгебраическое уравнение. Мы как будто получили систему с одной степенью свободы. Нас интересует, каков период ее собственных колебаний. Но мы не будем его вычислять, а рассмотрим вместо этого аналогичный электрический пример (рис. 20). Введем обозначения:

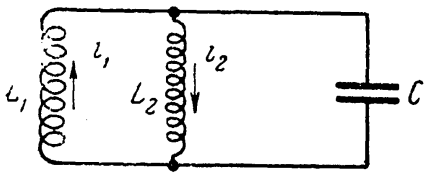


Рис. 20.

$$Q_1 = \int_0^t i_1 dt, \quad Q_2 = \int_0^t i_2 dt$$

(Q_1 и Q_2 — заряды). Потенциальной энергией здесь является электростатическая энергия

$$U = \frac{(Q_1 - Q_2)^2}{2C}.$$

Кинетической энергией здесь является магнитная энергия

$$T = \frac{L_1\dot{Q}_1^2}{2} + \frac{L_2\dot{Q}_2^2}{2}.$$

Кроме того, если взять обход, показанный стрелками, то по обобщенному закону Кирхгофа имеем:

$$L_1\dot{Q}_1 + L_2\dot{Q}_2 = 0.$$

Сравните наши две задачи: они совершенно аналогичны. Те, кто занимается электрическими схемами, сразу дадут ответ на вто-

рую задачу. Две параллельно соединенные индуктивности эквивалентны одной индуктивности:

$$L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}.$$

Отсюда видно, что в механическом примере мы можем рассуждать так, как будто у нас одна степень свободы, но момент инерции есть

$$I = \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2}.$$

Следовательно, период колебаний механической системы равен

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}}.$$

Для меня механический пример не был *сразу* ясен. Я бы не смог сразу, не рассуждая, заменить два диска *одним* диском с подходящим моментом инерции. Между тем электрическая модель для меня совершенно очевидна. Вероятно, для тех, кто много занимается пропеллерами, дело обстоит как раз наоборот.

Еще одно замечание: чему в электрической системе соответствует вращение всей механической системы как целого? Ему соответствует постоянный ток в цепи из индуктивностей. Если он есть, то он будет продолжать течь неопределенно долго (в случае отсутствия сопротивления). Здесь видно, что теория колебаний систем с одной степенью свободы охватывает более широкий класс явлений, чем это могло показаться с первого взгляда.

Перейдем к другому вопросу. Очень часто, когда делают выводы из той или иной теории, забывают, что допущена определенная идеализация и впадают при этом в большие ошибки. Вернемся к тем предпосылкам, из которых мы исходили, когда рассматривали маятник с одной степенью свободы. Мы считали, что стержень не имеет массы. В сущности, этим мы откинули все явления, связанные с тем, что стержень может колебаться, как распределенная система. Казалось бы, естественно представить себе, что стержень становится все более и более жестким, но здесь нельзя перейти к пределу. Современная физика считает, что принципиально не существует абсолютно жестких тел. Я приведу доказательство этого утверждения, данное Лауэ. Предположим, что у нас имеется очень длинный стержень (рис. 21) и пусть он абсолютно жесткий. Если мы передвинем конец A стержня,

то в то же мгновение должен передвинуться и конец B. Теория относительности утверждает, что это невозможно: она принимает в качестве постулата, что скорость сигнала может быть только меньше или равна скорости света. Выход из противоречия в том, что благодаря сжимаемости стержня движение передается по нему не мгновенно.

Разберем другое сделанное нами предположение. Допустим, что мы можем ограничиться рассмотрением одной степени свободы. Вообще говоря, закон Гука не имеет места. Пользуясь, как мы это делали, законом Гука, мы ограничились первым членом разложения силы, как функции смещения, в степенной ряд. Можно ли отбрасывать остальные члены? Это очень важный

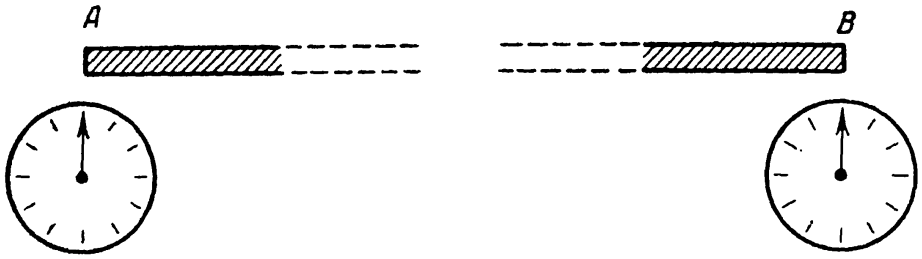


Рис. 21.

и тонкий вопрос. Существует ли непрерывная зависимость между параметрами, входящими в дифференциальное уравнение, и его решениями? Я не знаю, рассмотрен ли этот вопрос где-нибудь как следует (кое-что сказано в книге Куранта и Гильберта[1]). Между тем без такого рассмотрения никакая математическая теория не может претендовать на физическую значимость.

Борель приводит пример, где сколь угодно малое специальное изменение дифференциального уравнения ведет к коренному изменению характера решений. Надо надеяться, что тот класс уравнений, с которым мы имеем дело, не допускает подобных вещей. Пример Бореля связан как раз с гармоническими колебаниями. Напишем уравнение

$$m\dot{x}^2 + kx^2 = \text{const}.$$

Его решениями являются синусоидальные функции, имеющие периодический или, говоря более обще, осциллаторный (колебательный) характер. (Здесь характерно чередование: максимум, нуль, минимум и т. д.)

[1] [Р. Курант и Д. Гильберт. Методы математической физики. (М.—Л., 1951).]

Изменим уравнение следующим образом:

$$m\dot{x}^2 + kx^2 = \text{const} + \lambda t, \tag{2}$$

причем константа λ положительна и как угодно мала. Добавление члена λt *качественно* изменяет характер решений: уравнение (2) не допускает колебательного решения. Действительно, в силу (2)

$$(m\ddot{x} + kx)\,\dot{x} = \lambda,$$

что исключает (так как $\lambda > 0$) возможность равенства $\dot{x} = 0$. Поэтому x не может иметь максимума или минимума, решение не может быть осциллаторным. Если бы мы получили уравнение (2) и откинули бы член с λ ввиду его малости, то, даже интересуясь только изменением x на протяжении конечного времени, мы получили бы в корне неправильный ответ.

К счастью, в тех случаях, с которыми мы оперируем, дело обстоит, повидимому, благополучно. Однако вы видите, насколько нужно быть осторожным: приходится предполагать, что мы такого рода отбрасывания делаем удачно.

Вернемся к физике. Обычно говорят: в случае груза, висящего на пружине, можно считать, что система имеет одну степень свободы, если масса пружины мала по сравнению с массой груза. По существу это в конечном счете верно. Смысл того, что я скажу — не в том, что обычное утверждение ошибочно, а в том, что оно не разъясняет сущности дела. Ведь при выводе уравнения движения рассматриваемой системы предположение о малости массы пружины нигде не входит. При выводе уравнения движения пользуются вторым законом Ньютона:

$$m\ddot{x} = f, \tag{3}$$

справедливым независимо от величины массы m. Предполагается далее, что

$$f = -kx.$$

При этом ни слова не говорится о том, что масса пружины мала. Но известно, что если пружина имеет очень большую массу, то уравнение (3) неверно. В чем же дело?

Мы сделали предположение, что если нижний конец пружины сдвинется на x, то разовьется сила $-kx$. Это, вообще говоря, *неверно*. Эта гипотеза верна только в статическом случае,

если пружина растягивается достаточно медленно. В общем случае пружина в разных своих частях сжата или растянута по-разному; при этом ее удлинение не пропорционально силе.

Итак, существенно предположение, что пружина деформируется *статически* или, точнее, квазистатически. Как это связано с величиной ее массы? Строгий анализ показывает, что пружина сама может колебаться, как распределенная система. При этом пружина уже не ведет себя квазистатически. Но если масса пружины мала, то мы имеем право не считаться с этими колебаниями, потому что они тогда очень быстрые и весьма быстро затухают. Они изменяют картину только в „первый момент", пока они еще не затухли. Но иногда уже „первый момент" чрезвычайно существенен. Я приведу два примера.

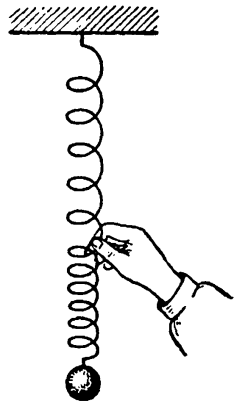


Рис. 22.

Допустим, что мы оттягиваем пружину за середину (рис. 22) и отпускаем (аналогично можно поступить с зарядом на конденсаторе). Если начальные условия — „естественные" для одной степени свободы (т. е. в начальный момент пружина деформирована однородно), то быстрые колебания не возникают. Но в данном случае в первый момент пружина начнет быстро колебаться, и эти быстрые колебания могут поглотить очень много энергии. Потенциальная энергия равняется в начальный момент

$$\frac{k'x^2}{2},$$

где k' — сила, нужная для того, чтобы оттянуть пружину на 1 см в месте захвата. Если это место — середина пружины, то $k'=2k$, где k — жесткость при растяжении за конец пружины. Таким образом, сила при том же самом удлинении вдвое больше, если точка ее приложения находится в середине пружины. Итак, потенциальная энергия равна в начальный момент

$$\frac{(2k)\,x^2}{2}.$$

Когда натяжение в пружине перераспределяется, смещение груза останется равным x, так как груз не успеет заметно сдвинуться. Поэтому после перераспределения потенциальная энергия будет равна $kx^2/2$. Отсюда видно, что *половина* начальной энергии ухо-

дит на быстрые колебания. Дальнейший процесс идет с половинной энергией.

Второй пример — электрический аналог первого. Сперва заряжается одна пара пластин (рис. 23), затем проскакивает искра и возникают быстрые затухающие колебания в контуре, состоящем из конденсаторов и соединяющих их проводов (колебания эти быстрые из-за того, что соединительные провода очень коротки). Вследствие этих колебаний происходит перераспределение зарядов между пластинами. После того, как произошло это перераспределение, два конденсатора можно рассматривать как один. Но в первый момент этого делать нельзя, так как имеет место „неестественное" начальное условие. Вместе с перераспределением зарядов происходит перераспределение энергии. Часть энергии идет при этом на теплоту, выделяющуюся при быстрых колебаниях.

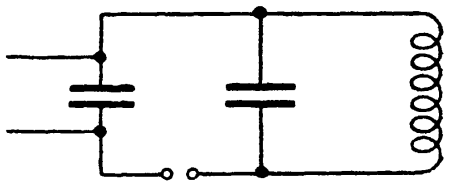


Рис. 23.

Если забыть об особенностях начальных условий, то будет сделана ошибка в энергии. Эта ошибка может быть очень велика (может превратиться в тепло любая доля энергии), в зависимости от точки приложения силы (в случае пружины) или от соотношения емкостей (в случае конденсаторов). Итак, не нужно забывать, что могут быть такие начальные условия, при которых обычная идеализация не является справедливой.

Рассмотрим теперь системы с одной степенью свободы в более общем случае, когда емкость и индуктивность зависят от величин электрического и магнитного поля. Так будет в случае катушки с железом и конденсатора с сегнетовой солью. Поведение таких систем при больших амплитудах описывается *нелинейными* дифференциальными уравнениями. Написать эти уравнения легко, но они мало изучены. Здесь можно пойти в таком направлении: можно стараться представить себе на основании самого дифференциального уравнения, не решая его, всю качественную картину движений. Особенно важен и плодотворен этот подход в теории так называемых автоколебательных систем. Этими вопросами мы будем в свое время заниматься[1].

---

[1] [См. 13-ую и 14-ую лекции.]

Постараемся, применяя эти методы, выяснить картину движения, не ограничиваясь специальным случаем линейности. Пусть уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x}=f(x),$$

где $f(x)$ — однозначная функция x. Умножив уравнение на dx/dt и проинтегрировав, мы получим, обозначив

$$F'(x)=-f(x),$$

первый интеграл:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+F(x)=W$$

(W — постоянная). $F(x)$ называется потенциальной энергией. Это уравнение выражает закон сохранения энергии (мы имеем дело с консервативной системой).

Пусть для простоты $m=2$. Тогда, обозначив

$$W-F(x)=\Phi(x),$$

имеем:

$$\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\Phi(x)}. \tag{4}$$

Двузначность квадратного корня имеет огромное значение для поведения системы. С ней связана возможность периодических (и вообще колебательных) решений.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt}=\psi(x),$$

где $\psi(x)$ — однозначная функция от x. Такое уравнение не допускает периодического решения (оно соответствует телу без массы, движущемуся в вязкой жидкости). Физически ясно, что здесь не может быть периодического движения: при периодическом движении тело должно поочередно проходить одно и то же положение, двигаясь в одну, затем в другую сторону, т. е. при одном и том же x скорость должна иметь то один, то другой знак. Но здесь, при данном x, скорость dx/dt имеет вполне определенное значение, и, следовательно, это невозможно. В случае же консервативной системы, из-за наличия двух знаков, это не запрещается.

Заметим, что $\Phi(x)\geqslant 0$ (мнимые скорости не рассматриваются).

Рассмотрим ряд случаев.

1. Пусть на всем рассматриваемом интервале значений x функция $\Phi(x)$ не имеет корней, т. е. не обращается в нуль. Так обстоит дело, например, тогда, когда точку отталкивает сила, пропорциональная расстоянию.

Перепишем дифференциальное уравнение (4) в виде

$$dt=\frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}},$$

откуда

$$t+C=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}}.$$

Предположим, что мы пускаем часы ($t=0$) в тот момент, когда $x=x_0$ (мы вводим специальный отсчет времени). Тогда $C=0$.

С увеличением x здесь t монотонно растет. Скорость направлена всегда в одну сторону. Мы еще не нашли x, как функцию от t, т. е. $x=x(t)$. Однако мы уже знаем, что t — монотонная функция от x. Следовательно, ее можно однозначно обернуть. Таким образом, мы решили качественную задачу. Мы знаем, что тело все время движется в одном и том же направлении. Может случиться, что x обращается в бесконечность при конечном значении t, т. е. тело за конечное время уходит в бесконечность. Но нормальный случай — тот, когда точка уходит в бесконечность за бесконечное время.

2. Пусть функция $\Phi(x)$ имеем два корня:

$$\Phi(x_1)=0,\quad \Phi(x_2)=0,$$

и пусть начальное значение $x=x_0$ заключено между этими корнями:

$$x_1\leqslant x_0\leqslant x_2.$$

Тогда

$$t=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}},$$

причем

$$\Phi(x)=(x_2-x)(x-x_1)\Psi(x)$$

и $\Psi(x)$ в интервале $x_1<x<x_2$ не обращается в нуль. Так как $\Phi(x)\geqslant 0$, то в интервале $x_1<x<x_2$ имеем $\Psi(x)>0$; значения $\Psi(x_1)$ и $\Psi(x_2)$ могут равняться нулю. Если $\Psi(x_1)$ равно нулю,

то x_1 — кратный корень функции $\Phi(x)$. Аналогично обстоит дело с $\Psi(x_2)$. В общем случае можно написать:

$$\Phi(x)=(x_2-x)^m(x-x_1)^n\Psi(x),$$

где m и n — целые числа, указывающие кратность корней x_2 и x_1, а $\Psi(x)\neq 0$ на сегменте $x_1\leqslant x\leqslant x_2$. Заметим еще, что если корень — двойной, то в нем не только $\Phi(x)$, но и $\Phi'(x)$ обращается в нуль.

Рассмотрим случай простых корней.

Пусть сначала dx/dt — положительная величина. Точка движется в сторону возрастающих x. При $x=x_2$ она имеет скорость нуль. Достигает ли она положения $x=x_2$ за конечное или за бесконечное время? Оказывается, что если корень $x=x_2$ — простой, то она достигает положения $x=x_2$ за конечное время.

Это следует из известной теоремы, согласно которой при $f(b)=\infty$ интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

конечен, если в окрестности точки b

$$|(b-x)^p f(x)|<C,$$

причем $p<1$; в нашем случае простого корня это неравенство выполняется при $p=1/2$. Оказывается далее, что если корень $x=x_2$ — кратный, то положение $x=x_2$ достигается за бесконечное время. Мы имеем дело в последнем случае с *асимптотическим* движением: точка асимптотически приближается к положению $x=x_2$.

Различный характер движения в случае простого и кратного корня поясняет следующий простой пример.

Пусть

$$\Phi(x)=(a-x)^2$$

($x=a$ — двукратный корень). Здесь интеграл

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}}=\int_0^a \frac{dx}{a-x}$$

логарифмически обращается в бесконечность. Пусть теперь

$$\Phi(x)=a-x$$

($x=a$ — простой корень). Тогда интеграл

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a-x}}$$

конечен.

Если $dx/dt<0$ и происходит движение в обратную сторону, то можно высказать аналогичные утверждения.

Пусть корни $x=x_1$ и $x=x_2$—простые. Точка достигает положения $x=x_2$ за конечное время. Что произойдет в точке $x=x_2$? Скорость здесь равна нулю. Найдем ускорение:

$$f(x)=-F'(x)=\Phi'(x).$$

Но в случае простого корня

$$\Phi(x)=(x_2-x)\Psi(x),$$

где $\Psi(x_2)>0$ и, следовательно,

$$f(x_2)=\Phi'(x_2)=-\Psi(x_2)<0.$$

Таким образом, ускорение в положении $x=x_2$ отрицательно, а значит, по достижении положения $x=x_2$ возникает движение в обратном направлении. Материальная точка пробегает затем все положения со скоростью, совпадающей с прежней по абсолютной величине, но с обратным знаком. Легко видеть, что движение при этом *периодическое*.

Итак, мы получили следующий замечательный результат. Если $\Phi(x)$ не имеет корня, то движение непременно присходит в одном направлении. Если имеется два корня и оба—простые, то получается периодическое (либрационное) движение. Если хотя бы один из корней двойной, то получится асимптотическое (лимитационное) движение.

В случае либрационного движения для периода τ имеем, очевидно, выражение

$$\tau=2\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}}.$$

Мы приобрели большие знания путем простого исследования уравнения (4).

Применим теперь полученные общие результаты к линейному осциллатору и к маятнику.

В случае линейного осциллатора

$$F(x)=\frac{kx^2}{2}$$

и $\Phi(x)$ имеет при всяком $W>0$ два простых корня:

$$x_1=-\sqrt{\frac{2W}{k}},\quad x_2=+\sqrt{\frac{2W}{k}}.$$

Движение — периодическое, между $x=x_1$ и $x=x_2$.

Совершенно другая картина получается для маятника. Возьмем математический маятник. Для него

$$F(\varphi)=mgl(1-\cos\varphi)=2mgl\sin^2\frac{\varphi}{2},\quad \Phi(\varphi)=W-2mgl\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Будем различать три случая.

1. Пусть

$$W<2mgl.$$

Тогда $\Phi(\varphi)$ имеет корни $\pm\varphi_1$, где $0<\varphi_1<\pi$. Оба корня — простые, так как $\Phi'(\varphi_1)\neq 0$. Следовательно, имеет место периодическое движение, причем период его зависит от амплитуды. Если φ_1 не очень велико, имеем приближенно, обозначив через φ_0, максимальное отклонение

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right)}.$$

Период колебаний консервативной системы, вообще говоря, зависит от амплитуды.

2. Пусть

$$W=2mgl.$$

Функция $\Phi(\varphi)$ имеет теперь корни

$$\varphi_{1,2}=\pm\pi.$$

Эти корни — кратные, и, следовательно, будет лимитационное движение: маятник подходит к верхнему положению асимптотически, никогда его не достигая.

3. Пусть, наконец,

$$W>2mgl.$$

Тогда уравнение $\Phi(\varphi)=0$ не имеет действительного корня. Движение происходит все время в одном и том же направлении: маятник совершает вращательное движение.

Здесь, для консервативной системы, с помощью уравнения (4) мы легко получили всю картину движений. В случае неконсервативных систем такой анализ невозможен. Качественное исследование их движений должно исходить непосредственно из дифференциального уравнения. Разнообразие возможных движений оказывается там гораздо больше. При этом ряд теорем о качественном характере движений проще всего излагается на геометрическом языке.

ВОСЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(3/XI 1930 г.)

Иллюстрации к качественной теории Вейерштрасса. Наглядное представление и математическая теория. Представление движения на фазовой плоскости. Особые точки и замкнутые интегральные кривые нелинейного дифференциального уравнения.

Сначала несколько замечаний, относящихся к предыдущей лекции.

Мы поставили вопрос математически и решили его так, как это впервые сделал Вейерштрасс. Мы имели закон сохранения энергии

$$\frac{m\dot{x}^2}{2}+F(x)=W. \tag{1}$$

Это было наше уравнение движения. Для упрощения выкладок мы положили $m=2$ (иначе говоря, ввели соответствующие единицы); тогда для скорости $\dot{x}$ находим:

$$\dot{x}=\sqrt{W-F(x)}.$$

В каждой точке пути материальная точка имеет потенциальную энергию $F(x)$. Мы обозначили разность $W-F(x)$ через $\Phi(x)$. Заметим, что $\Phi(x)$ есть простое обозначение кинетической энергии, выраженной как функция смещения.

В каждой точке частица имеет определенную кинетическую и потенциальную энергию. Мы можем теперь уяснить себе почти без математики, как будет двигаться частица.

Пусть материальная точка движется в поле тяжести по желобку определенной формы. В каждом положении точка имеет определенную потенциальную энергию $U=mgy(x)=F(x)$. Давая желобку подходящую форму, мы получим любую зависимость $F(x)$ потенциальной энергии от положения. Изобразим, например (рис. 24, *а*), желобок, соответствующий постоянной силе, т. е. потенциальной энергии, пропорциональной расстоянию. Изобразим далее (рис. 24, *б*)

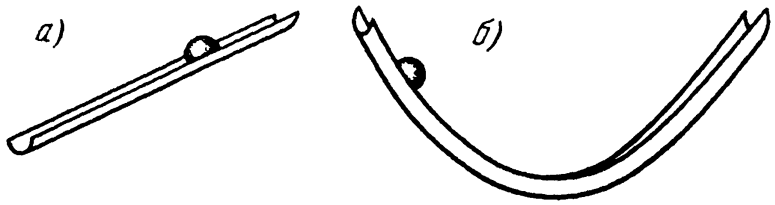


Рис. 24.

желобок, соответствующий квазиупругой силе, т. е. потенциальной энергии, пропорциональной квадрату расстояния.

Без всякой математики легко видеть, как точка будет двигаться по желобку: она будет подниматься до тех пор, пока кинетическая энергия не обратится в нуль; тогда точка остановится.

Кинетическая энергия обращается в нуль тогда, когда потенциальная энергия равна полной энергии. Это происходит при x таком, что $F(x)=W$ (это „условие остановки“ мы уже получили аналитически). Затем точка повернет обратно. Что будет, если функция $W-F(x)$ не имеет корня, т. е. если во всех положениях частицы $F(x)$ меньше, чем W? Если кинетическая энергия настолько велика (рис. 25), что W больше максимума $F(x)$, то материальная точка перескочит через барьер и будет двигаться дальше. Если кинетическая энергия как раз такая, что в максимуме $F(x)$ имеем $F(x)=W$, то точка дойдет до максимума потенциальной энергии и там остановится. В максимуме первая производная $F'(x)$ равняется нулю. Следовательно, в этой точке и сила равняется нулю, так как

$$F'(x)=-f(x).$$

В такой простой картине все следует из наглядности. Зачем же мы проделали в прошлый раз ряд математических выводов? Дело в том, что „житейские“ разговоры, в сущности, грешат в одном

месте. Пусть кинетическая энергия точки меньше максимальной потенциальной. Мы знаем, что в таком случае точка должна остановиться. Но уверены ли мы, что она дойдет до точки остановки за конечное время? Ведь только при этом условии можно говорить о периодическом движении с конечным периодом. А что будет в случае лимитационного движения? Может быть, и в этом случае частица доходит до крайнего положения за конечное время? Здесь наглядные рассуждения ничего не дают, а необходимо математическое исследование. Без него вы не получите серьезного ответа. Начинающему очень часто кажется: к чему вся эта математика? Ему кажется, что „и так все ясно". Но в действительности какой-нибудь существенный пункт при этом может остаться неясным. Иметь меру требуемой математической строгости — самое трудное для физика. Правильнее будет сказать так: ему необходимо уметь определять эту меру.

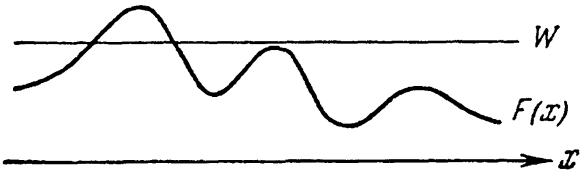


Рис. 25.

Изучая поведение консервативной системы с одной степенью свободы, мы исходили из общих законов движения. Закон сохранения энергии дает:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + F(x) = W.$$

Продифференцировав это уравнение, имеем:

$$\dot{x}[m\ddot{x} - f(x)] = 0,$$

так как $f(x) = -F'(x)$ или $F(x) = -\int f(x)\,dx$. Из уравнения, полученного в результате дифференцирования, следует, что

$$m\ddot{x} = f(x).$$

Это — выражение закона Ньютона. Если f зависит только от x, то, зная $f(x)$, можно найти $F(x)$. Это равнозначащие выражения. Существенно, что здесь сила зависит только от положения (бывают случаи, когда сила зависит не только от положения).

Если тело падает под действием земного притяжения, его потенциальная энергия есть

$$U = mgx.$$

Отсюда для силы получаем:

$$f = -\frac{dU}{dx} = -mg.$$

Пусть это же тело падает в вязкой жидкости. Здесь возникает трение и закон падения будет другим. Если остановить тело, то силы трения нет. Сила трения не определена тем, в каком месте находится тело. Мы получим хорошее приближенное выражение для силы трения, предполагая, что она прямо пропорциональна скорости и действует навстречу скорости. Тогда

$$f = -mg - k\dot{x},$$

и дифференциальное уравнение движения таково:

$$m\ddot{x} = -mg - k\dot{x}. \tag{2}$$

Теперь сила f — функция не только от x, но и от $\dot{x}$. Уравнение (2) следует из второго закона Ньютона, но перейти от него к такому уравнению, которое было бы аналогично закону сохранения энергии в форме (1), простым образом невозможно (невозможно потому, что в выражение силы вошла производная $\dot{x}$). Здесь нет закона сохранения энергии в механическом смысле. Здесь развивается теплота и постоянной остается сумма внутренней энергии системы и развиваемой теплоты, которая в механические уравнения никак не входит.

Анализ, который был нами проведен, годится для случая, когда сила не зависит от скорости, но он ничего не может дать для общего случая. В этом общем случае можно, однако, пользоваться другим методом исследования, к которому мы теперь и перейдем. Он применим как к консервативным, так и к неконсервативным системам. Этот метод носит геометрический характер. Он связан с тем языком, на котором говорят все те, кто занимается квантами. Вся их терминология основана на этом методе. В более сложных случаях этот метод — единственный, и с ним нужно хорошо освоиться. Для нелинейных колебательных проблем беспроволочной телеграфии этот метод, в сущности, был введен А. А. Андроновым.

Математическая постановка задачи такова. Дано нелинейное уравнение вида

$$m\ddot{x} = f(x, \dot{x}). \tag{3}$$

Вообще говоря, такое уравнение нельзя проинтегрировать. Как же подойти к исследованию движения? Как „выудить“ из уравнения,

какими свойствами обладают движения описываемой им системы?

Нас интересуют смещение x и скорость $\dot{x}$. Нельзя ли изучить зависимость между x и $\dot{x}$? Мы можем написать:

$$y = \dot{x}.$$

Каждому значению x соответствует определенное значение $y = y(x)$, т. е. скорость есть функция координаты. Поставим вопрос так: какую скорость имеет точка в данном положении? Ответить на него вовсе не легко даже в случае консервативной системы.

Итак, мы хотим найти вид функции $y(x)$.

Принято, вместо скорости $y = \dot{x}$, вводить в рассмотрение количество движения или импульс $y = m\dot{x}$. Последующее изложение при этом значительно упростится. Так делается в аналитической механике и в теории квантов. В сложных случаях это существенно; но пока речь идет об одной степени свободы, это не имеет большого значения.

Напишем:

$$y = y(x) = m\dot{x},$$

откуда

$$m\ddot{x} = y'(x)\dot{x} = \frac{yy'}{m}. \tag{4}$$

Подставляя (3) в (4), находим:

$$yy' = mf\left(x, \frac{y}{m}\right).$$

Мы получили, таким образом, дифференциальное уравнение для y как функции от x. Первоначальное уравнение движения было второго порядка (в него входила вторая производная от x по t), но y, выраженное как функция от x, удовлетворяет уравнению *первого* порядка. Это существенно: между первым и вторым порядком в случае нелинейного уравнения имеется громадная разница. Всегда ли можно понизить порядок? Если бы в выражение для силы входили не только x и y, но еще явным образом время t, то этого нельзя было бы сделать: в правой части осталось бы t. Употребленный нами прием помогает только тогда, когда t в выражение для силы не входит.

Можно ли *физически* выделить системы, у которых сила не зависит явно от времени? Явная зависимость силы от времени означает, что есть постороннее влияние на систему. Если система

замкнута, то такой зависимости не будет. Системы, где сила явно не зависит от времени, мы называем *автономными*. Вся область генерации колебаний в радиотехнике (кроме вопросов модуляции) приводит к рассмотрению именно автономных систем.

Мы свели задачу на исследование уравнения первого порядка. Зная y как функцию от x, уже нетрудно получить зависимость смещения x от t.

Итак, перед нами математическая задача — исследовать уравнение

$$yy' = f(x, y) \tag{5}$$

(для простоты мы положили $m=1$). Вообще говоря, решить такое уравнение мы не умеем. Мы можем провести только качественное исследование. В общем случае — это единственный путь. Для консервативной нелинейной системы этот путь неизменно приводит к цели. Вообще говоря, это вещи очень сложные, они требуют большого математического аппарата.

Вы знаете, что́ называется решением дифференциального уравнения. Функция

$$y = \varphi(x)$$

есть решение дифференциального уравнения (или удовлетворяет дифференциальному уравнению), если ее подстановка в дифференциальное уравнение превращает его в тождество. Возьмем плоскость x, y. Если $y=\varphi(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению, то кривая, изображающая эту функцию, есть *интегральная кривая*.

Мы имеем одно уравнение первого порядка. Его общее решение зависит от одной произвольной постоянной, а значит, имеются различные интегральные кривые, соответствующие различным значениям этой произвольной постоянной, т. е. целое *семейство* интегральных кривых. Мы можем поэтому потребовать от функции $\varphi(x)$, чтобы она удовлетворяла не только дифференциальному уравнению, но еще и некоторому дополнительному условию. Потребуем, чтобы при $x=x_0$ было $y=y_0$. Здесь x_0 и y_0—любые заданные величины. Нельзя заранее утверждать, что всегда существует такая функция, но можно указать достаточное условие того, что существует одна и только одна функция, удовлетворяющая поставленному требованию. На нашем геометрическом языке это требование означает, что интегральная кривая должна про-

ходить через точку (x_0, y_0). Упомянутое выше достаточное условие таково: если в данной точке

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{f(x, y)}{y} \right] \right|_{x_0, y_0} < M, \tag{6}$$

где M — некоторое положительное число, то через эту точку проходит одна и только одна интегральная кривая. Таким образом, если в точке (x_0, y_0) производная $\partial[f/y]/\partial y$ конечна, то через точку (x_0, y_0) проходит интегральная кривая, и притом только одна. Если же мы случайно попали в точку, где условие (6) не удовлетворяется, то мы имеем дело с сомнительным случаем — сомнительным потому, что высказанное условие — достаточное, но не необходимое. Точки, для которых несправедливо утверждение, что через них проходит одна и только одна интегральная кривая, называются *особыми точками* дифференциального уравнения. Оказывается, что они имеют огромное значение в теории дифференциальных уравнений. Теория колебаний ими очень интересуется.

Возьмем немного более общий случай, чем (5), а именно уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{7}$$

[в случае (5) $Q(x,y)=y$]. Производная dy/dx всюду конечна, кроме точки $Q=0$. Если в точке $x=x_0$, $y=y_0$ имеем $P(x,y)=0$, $Q(x,y)=0$, то точка является особой. Через всякую простую точку проходит одна и только одна интегральная кривая. Через особые точки проходит несколько интегральных кривых или же не проходит ни одной.

Рассмотрим несколько примеров.

Первый пример.

$$\frac{dy}{dx} = -a^2 \frac{x}{y}.$$

Это уравнение легко интегрируется:

$$y^2 + a^2 x^2 = \text{const}.$$

Мы получаем семейство кривых, потому что константа может быть любая. Это — семейство эллипсов, причем через каждую точку проходит один эллипс (рис. 26). Подставляя в левую часть координаты точки, мы находим значение константы. Но зададим

начальное условие $x=0$, $y=0$. Тогда константа равна нулю, и мы имеем

$$y^2+a^2x^2=0.$$

Это не есть уравнение действительной кривой. Точка $x=0$, $y=0$ есть особая точка: через нее не проходит ни одна интегральная кривая.

Второй пример.

$$\frac{dy}{dx}=a^2\frac{x}{y}.$$

Здесь, интегрируя, мы получаем:

$$y^2-a^2x^2=\text{const}.$$

Это — семейство гипербол с общими асимптотами (рис. 27). Через особую точку $x=0$, $y=0$ проходят две интегральные кривые, а именно асимптоты.

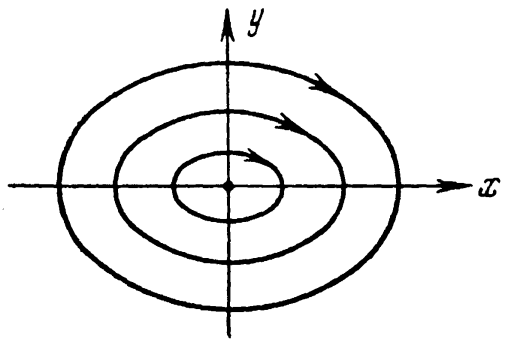


Рис. 26.

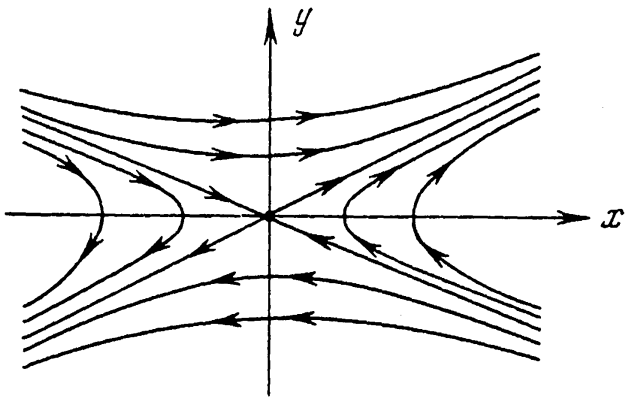


Рис. 27.

Мы получили уже два типа особых точек. В первом примере мы имели дело с *центром*, во втором особая точка называется *седлом* (col — впадина горы).

Вернемся снова к консервативной системе, для которой

$$\ddot{y}=f(x).$$

Особая точка

$$f(x)=0,\ y=0$$

либо седло, либо центр. Для того, чтобы узнать характер особой точки, разложим около нее $f(x)$ в ряд. Пусть в особой точке $f(x)=0$. Тогда

$$f(x)=a_1x+a_2x^2+\ldots$$

Если первый коэффициент отрицателен, то особая точка — центр, если положителен — седло.

Каков физический смысл особой точки? В ней $y=0$, т. е. скорость равна нулю, и $f(x)=0$, т. е. сила равна нулю.

Таким образом, особая точка изображает *состояние равновесия*. Потенциальная энергия системы имеет в особой точке экстремальное значение (максимум или минимум). Смотря по тому, будет ли a_1 положительным или отрицательным, будет максимум или минимум потенциальной энергии. Случай $a_1>0$ (седло) соответствует неустойчивому, $a_1<0$ (центр) — устойчивому равновесию. Если система консервативна, то могут быть только эти два типа особых точек. В неконсервативных системах возможны еще и другие.

В самом общем случае (7) особыми точками являются точки пересечения кривых $P(x,y)=0$, $Q(x,y)=0$. Каждой особой точке соответствует положение равновесия системы.

Представим себе теперь, что мы начертили интегральные кривые и нашли, что среди них есть замкнутые кривые. Замкнутая кривая есть изображение периодического явления. Доказать это очень просто. Пусть для $t=0$ имеем $x=x_0$, $y=y_0$. Если частица возвращается через некоторое время в положение $x=x_0$ и снова получает скорость $y=y_0$, то дальнейшее течение процесса идентично повторяется.

В этом рассуждении мы считали, что время возвращения τ в исходное состояние конечно. Может ли это время быть бесконечным? Нужно ввести одно новое понятие, и тогда станет очевидным, что этого не может быть. y есть скорость движения материальной точки. Совсем другое — скорость движения *изображающей* точки (x,y) вдоль интегральной кривой на фазовой плоскости — плоскости (x,y). Для этой фазовой (или диаграммной скорости в случае уравнения (3) имеем:

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{y^2+f^2(x,y)}.$$

Скорость ds/dt равна нулю, только если одновременно и $f(x,y)=0$ и $y=0$. Длина нашей замкнутой кривой конечна. Поэтому, если на этой кривой нет особой точки, период будет конечным.

Если удалось доказать, что среди интегральных кривых есть замкнутые кривые, то тем самым доказано, что возможны периодические движения. Для отыскания периодических решений дифференциального уравнения надо „ловить“ такие замкнутые кривые.

Если найдены особые точки и замкнутые интегральные кривые дифференциального уравнения, то найдены положения равновесия и периодические движения системы.

Интересно реальное осуществление фазовых диаграмм. Представьте себе катодный осциллограф. Пусть отклонение пучка в одном направлении будет пропорционально току (x), а в другом, перпендикулярном — напряжению ($y = \dot{x}$). Движение пятнышка представит тогда движение изображающей точки на фазовой плоскости. Можно, таким образом, на опыте начертить интегральные кривые.

ДЕВЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(15/XI 1930 г.)

Изображение движения на фазовой плоскости (продолжение). Особые точки и замкнутые кривые. Фазовая картина некоторых консервативных систем. Теорема вириала и ее применение к кинетической теории газов.

Мы рассматривали в прошлый раз систему, описываемую уравнением вида

$$m\ddot{x} = f_1(x). \tag{1}$$

Отсюда, интегрируя, получаем:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + F(x) = W, \tag{2}$$

причем

$$f_1(x) = -F'(x).$$

Удобно рассматривать, вместо скорости $\dot{x}$, величину

$$m\dot{x} = y, \tag{3}$$

называемую импульсом или иногда — моментом. При этом уравнение (1) принимает вид

$$\dot{y} = f_1(x). \tag{4}$$

Для случая поступательного движения точки или вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси скорость и им-

пульс очень просто связаны между собой. В общем случае связь более сложная, но она всегда определяется условием

$$y = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}},$$

где T — кинетическая энергия. Разделив уравнение (4) на (3), получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{y}, \tag{5}$$

где $f(x) = mf_1(x)$.

Мы исследовали движение, исходя из этого дифференциального уравнения. Можно было бы поступить иначе — интегрировать соотношение (2). В простейших случаях можно при исследовании движения исходить из получающихся таким образом квадратур. Но для неконсервативных систем единственный путь — исследование интегральных кривых на фазовой плоскости.

Вообще говоря, через любую точку плоскости x, y проходит только одна интегральная кривая уравнения (5), но есть точки — они называются особыми, через которые проходит либо несколько интегральных кривых, либо ни одной. Для особых точек, в которых $f(x) = 0$ и $y = 0$, теорема Коши несправедлива.

Уравнение (5), *относящееся* к консервативной системе, может иметь два типа особых точек:

1) через которые не проходит *ни одна* интегральная кривая;

2) через которые проходят *две* интегральные кривые.

Точки первого типа называются центрами (centre), точки второго типа — седлами (col). Особые точки физически соответствуют состояниям равновесия. Таким образом, здесь может быть два рода состояний равновесия. Центры являются устойчивыми, седла — неустойчивыми состояниями равновесия, и, следовательно, характер особых точек служит критерием устойчивости.

Выясним, в каком направлении движется изображающая точка на фазовой плоскости. Если скорость, а следовательно, и y положительны, то x увеличивается, т. е. в верхней части фазовой плоскости изображающая точка движется так, что абсцисса увеличивается; если же скорость и y отрицательны (нижняя часть плоскости), то x уменьшается. Таким образом, движение происходит по часовой стрелке.

Как уже было сказано, особые точки соответствуют положениям равновесия. Замкнутые кривые на фазовой плоскости — это

периодические движения. Мы имеем на фазовой плоскости полную картину движения систем.

Я не буду останавливаться на общей качественной теории уравнений типа (5), а укажу лишь некоторые результаты.

Внутри замкнутой кривой всегда есть по крайней мере одна особая точка. Таким образом, колебания возникают только вокруг положения равновесия. Если внутри замкнутой кривой имеется одна особая точка, то это может быть только центр. Внутри замкнутой траектории могут находиться также одно седло и два центра или два седла и три центра. Вообще внутри замкнутой траектории возможно нечетное число особых точек и всегда число центров на единицу больше числа седел. Таким образом, возможны колебания вокруг нескольких положений равновесия, среди которых должны быть и неустойчивые. Все это справедливо для сколь угодно сложных консервативных систем.

Что получится, если особая точка расположена на замкнутой интегральной кривой? Около этой точки движение становится бесконечно медленным, и, следовательно, в этом случае нет периодического движения. Подходя к такой особой точке, изображающая точка останавливается, „застревает“, так как в особой точке сила и скорость равны нулю, а движение описывается дифференциальным уравнением второго порядка.

Разберем несколько простых примеров.

Начнем с гармонического движения. В этом случае уравнение (2) принимает вид

$$\frac{y^2}{2m}+\frac{kx^2}{2}=W.$$

Начало координат — особая точка; других особых точек нет. Существуют только периодические движения (рис. 26).

Рассмотрим, как ведет себя маятник с *не малой* амплитудой? В этом случае $F(\varphi)=2mgl\sin^2\frac{\varphi}{2}$ и

$$\frac{y^2}{2m}+2mgl\sin^2\frac{\varphi}{2}=W.$$

Интегральные кривые (рис. 28) показывают сразу всю картину движений маятника. Точки, через которые проходят две интегральные кривые, — это седла. Кривые нарисованы для ряда значений W. При $W=0$ получается центр. Потом идут замкнутые кривые, — при малой общей энергии получаются периодические решения. При

очень малой энергии — это почти эллипсы. Зададим такую энергию, при которой интегральная кривая проходит через точку неустойчивого равновесия — седло. Маятник стремится в это состояние в течение бесконечного времени. Он к нему приближается, но не доходит до него. Из нашей картины сразу видно, что, если мы сообщим маятнику еще бо́льшую энергию, периодичности уже не будет, маятник будет вращаться. Ход волнистой кривой показывает при этом, что возле центра маятник движется с наибольшей скоростью.

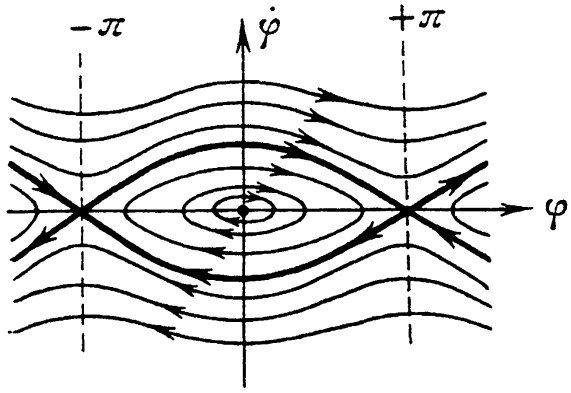


Рис. 28.

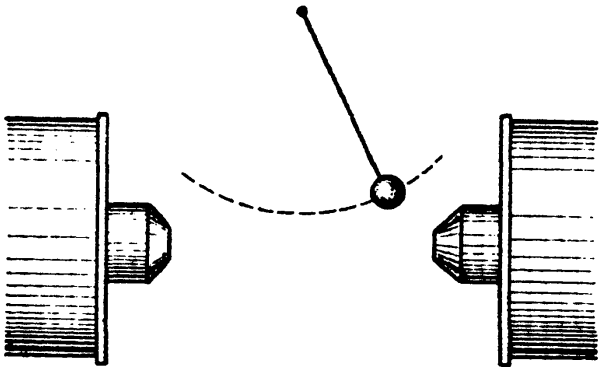


Рис. 29

Третий пример — железный маятник, помещенный между полюсами электромагнита (рис. 29). Устойчивое положение равновесия расщепляется на два таких положения, разделенных седлом. Внутри больших замкнутых кривых — два центра и одно неустойчивое положение равновесия. Картина на фазовой плоскости (рис. 30) сразу дает представление о всех возможных движениях.

Во всех случаях, когда существуют замкнутые кривые, изображающие периодические движения, они симметричны по отношению к оси абсцисс, так как скорость всегда имеет двойной знак:

$$y = \pm \sqrt{W - F(x)}.$$

Рассмотрим площадь эллипса (рис. 31), изображающего периодическое движение:

$$S = 2\int_{x_1}^{x_2} y\,dx.$$

Вместо x и dx введем время:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y}{m}, \quad dx = \frac{y}{m}\,dt,$$

так что

$$S=2\int_{t_1}^{t_2}\frac{y^2}{m}\,dt.$$

Промежуток времени от t_1 до t_2 составляет половину периода τ. Под знаком интеграла стоит удвоенная кинетическая энергия T.

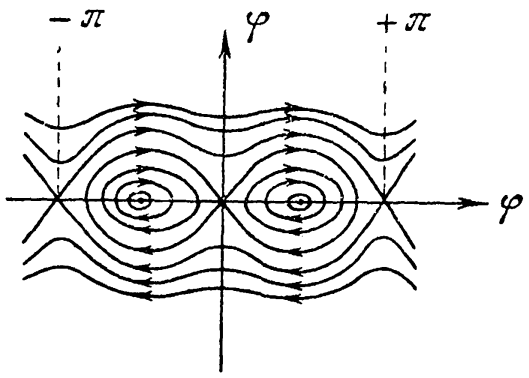


Рис. 30.

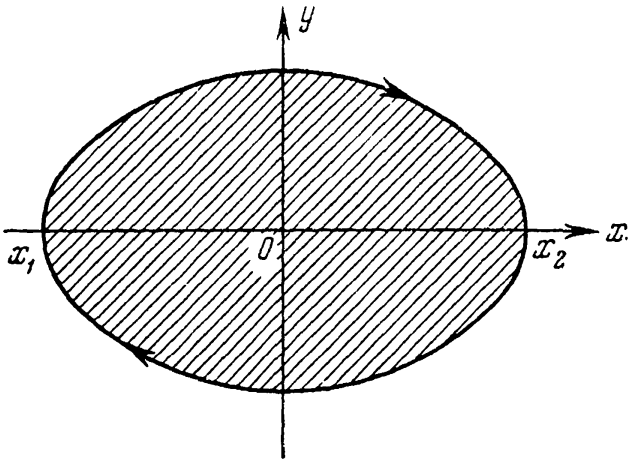


Рис. 31.

Таким образом,

$$S=2\int_{t_1}^{t_1+\frac{\tau}{2}}2T\,dt=\tau\cdot\frac{1}{\tau/2}\int_{t_1}^{t_1+\frac{\tau}{2}}2T\,dt,$$

или

$$S=\tau\cdot 2\overline{T}.$$

Замкнутая кривая ограничивает площадь, равную удвоенной средней кинетической энергии, умноженной на период. Вводя частоту $\nu=1/\tau$, мы можем написать:

$$S=2\overline{T}/\nu. \tag{6}$$

В квантовой теории это соотношение играет важную роль.

Вся ценность формулы (6) в том, что она справедлива в самом общем случае движения консервативной системы.

Возьмем частный случай гармонического осциллатора. Здесь соотношение (6) можно вывести еще иначе. Интегральная кривая — эллипс. Длины a и b его полуосей определяются соотношениями:

$$2mW=a^2,\quad \frac{2W}{k}=b^2.$$

Площадь эллипса есть

$$S=\pi ab=2\pi W\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Но

$$2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=\tau,$$

откуда

$$S=W/\nu. \tag{7}$$

Таким образом, в случае гармонического колебания площадь, охватываемая интегральной кривой, равна отношению *полной* энергии к частоте.

Но для гармонического колебания имеем:

$$\overline{T}=\overline{U},$$

а так как

$$\overline{T}+\overline{U}=\overline{W}=W,$$

получаем

$$\overline{T}=\overline{U}=\frac{W}{2}, \tag{8}$$

— полная энергия равна удвоенной средней кинетической энергии. Подставляя (8) в (7), мы приходим к соотношению (6). Запомним это общее соотношение и то, что в частном случае гармонических колебаний $\overline{T}=W/2$.

Существует ли какое-нибудь соотношение между средней кинетической и средней потенциальной энергией в общем случае? В механике для решения таких вопросов очень важную роль играет так называемая теорема вириала, которую мы сейчас докажем.

Будем исходить из самой простой, ньютоновой формы уравнений движения. Трем координатам i-той точки соответствуют три дифференциальных уравнения движения:

$$m_i\ddot{x}_i=X_i,\quad m_i\ddot{y}_i=Y_i,\quad m_i\ddot{z}_i=Z_i.$$

Хотя в механике это не принято, мы будем писать все уравнения в таком виде:

$$m_i\ddot{x}_i=X_i, \tag{9}$$

т. е. будем нумеровать подряд все координаты: $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, \ldots$ и обозначать их одной буквой x. При этом

$$m_1 = m_2 = m_3,\ m_4 = m_5 = m_6, \ldots$$

(каждая тройка относится к одной и той же материальной точке).

Умножив уравнение (9) на x_i, получаем:

$$m_i \ddot{x}_i\, x_i = X_i x_i,$$

или

$$\frac{d}{dt}(m_i x_i\, \dot{x}_i) - m_i \dot{x}_i^2 = X_i x_i.$$

Умножим теперь обе части равенства на dt, просуммируем по всем i, проинтегрируем между двумя какими угодно пределами t, $t+\tau$ и разделим на τ:

$$\frac{1}{\tau}\sum m_i x_i \dot{x}_i \Big|_t^{t+\tau} - \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} \sum m_i \dot{x}_i^2\, dt = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} \sum X_i x_i\, dt. \qquad (10)$$

Рассмотрим случай периодического движения. Пусть τ — период. Тогда

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i x_i\, \dot{x}_i \Big|_t^{t+\tau} = 0$$

и соотношение (10) принимает вид

$$2\overline{T} + V = 0, \qquad (11)$$

где

$$\overline{T} = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} \sum \frac{m \dot{x}_i^2}{2}\, dt$$

есть среднее значение за период полной кинетической энергии системы $T = \sum_{i=1}^{3n} \frac{m \dot{x}_i^2}{2}$, а

$$V = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} \sum X_i x_i\, dt \qquad (12)$$

есть среднее значение за период от суммы

$$\sum_{i=1}^{3n} X_i x_i.$$

Выражение (12) Клаузиус назвал *вириалом* данной системы сил.

Пусть теперь движение не периодическое, но такое, что ни скорость, ни координаты не обращаются в бесконечность (*финитное* движение). При этом

$$\sum_{i=1}^{3n} | m_i x_i \dot{x}_i | < M, \tag{13}$$

где M — некоторое положительное число.

Возьмем τ очень большим. При достаточно большом τ в силу (13) левая часть (10) с каким угодно приближением равна нулю. При этом и для непериодического движения с любым приближением справедливо соотношение (11). Оно выражает теорему Клаузиуса о вириале.

Теорема вириала получила большое применение в кинетической теории газов. Частный пример позволит нам сделать несколько существенных дополнительных замечаний.

Рассмотрим достаточно разреженный газ. Он подчиняется уравнению состояния

$$pV = R\Theta, \tag{14}$$

причем R пропорционально массе газа. Удобно брать 1 моль газа (число граммов, равное молекулярному весу). Тогда R — одно и то же для любого газа.

Построим самую грубую механическую картину. Будем считать, что молекулы — просто шары (это соответствует одноатомному газу). Их удары о стенки обусловливают давление. Каково соотношение между давлением и средней кинетической энергией молекул? (Для механической модели понятие температуры — совершенно чуждая вещь; мы же решаем механический вопрос.)

Пусть $\overline{u^2}$ — средний квадрат скорости одной молекулы. Тогда, по теореме вириала

$$2\overline{T} = Nm\overline{u^2} = -V.$$

Представим X_i как сумму внешних и внутренних сил:

$$X_i = X_i^{(e)} + X_i^{(i)}.$$

Общий вириал равен сумме соответствующих внешнего и внутреннего вириалов:

$$V = V^{(e)} + V^{(i)}.$$

Легко вычислить вириал внешних сил. Пусть сосуд представляет собой прямоугольный параллелепипед с ребрами a, b и c. Внешние силы действуют только со стороны стенок сосуда. На трех стенках $x=0$, $y=0$, $z=0$ вириал равен нулю. Строго говоря, это не очевидно, а нуждается в обосновании, так как если удары молекул о стенки — мгновенные, то сила обращается в бесконечность. В действительности, когда молекулы ударяют о стенки, они их слегка продавливают: „для того, чтобы оттолкнуть молекулу," стенка немного сдвигается (иначе силы не будет). На очень малом протяжении Δx в течение очень малого промежутка времени Δt сила $X_i^{(e)}$ очень велика. Но можно строго обосновать, что когда жесткость стенок неограниченно растет и $X_i^{(e)} \to \infty$, то Δx и Δt стремятся к нулю и притом так, что вириал тоже стремится к нулю.

На стенке $x=a$ вириал равен

$$a\sum \overline{X_i^{(e)}} = a(-pbc) = -pabc,$$

где p — давление. Действительно, $-\sum \overline{X_i^{(e)}}$ — это давление, умноженное на площадь стенки, ибо давление газа есть по определению средняя сила на единицу площади ее поверхности (давление на газ положительно, когда оно направлено внутрь).

Очевидно, по трем стенкам $x=a$, $y=b$, $z=c$

$$V^{(e)} = -3pabc = -3pV,$$

где $V=abc$ — объем газа. Следовательно,

$$Nm\overline{u^2} = -V^{(i)} + 3pV.$$

Это — основная формула кинетической теории газов.

Если газ очень разрежен, можно считать, что молекулы взаимодействуют только при соприкосновениях. Будем считать, что молекулы чрезвычайно малы. Тогда координаты двух молекул по какой-нибудь оси (назовем их здесь x_1 и x_2) в момент удара можно считать равными. По третьему закону Ньютона, силы взаимодействия $X_1^{(i)}$ и $X_2^{(i)}$, соответствующие координатам x_1 и x_2, равны по величине и противоположны по направлению:

$$X_1^{(i)} = -X_2^{(i)}.$$

Таким образом, все слагаемые вида $X_1^{(i)}x_1 + X_2^{(i)}x_2$, из которых состоит сумма $\Sigma X_i^{(i)}x_i$ в выражении внутреннего вириала, равны

нулю, а значит, и сам внутренний вириал равен нулю. Сделанные предположения о взаимодействии молекул означают, что мы ограничиваемся моделью *идеального* газа, но именно для этого случая и справедлив закон Бойля-Мариотта, на основании которого мы написали (14). В результате

$$N\overline{mu^2} = 3pV. \tag{15}$$

Сопоставляя (14) с (15), мы можем найти кинетическое толкование температуры: средняя кинетическая энергия молекулы есть

$$\frac{\overline{mu^2}}{2} = \frac{3R}{2N}\Theta.$$

Она пропорциональна температуре. Мы можем написать:

$$\frac{\overline{mu^2}}{2} = \frac{3}{2}k\Theta, \tag{16}$$

где

$$k = \frac{R}{N}$$

есть постоянная Больцмана. Соотношение (16) выражает основное положение классической статистической механики: температура есть мера кинетической энергии молекул.

Так как R известно, а N можно определить из опыта, то из опыта можно определить k, а следовательно, и среднюю кинетическую энергию молекулы газа. Мы получаем возможность оценить скорости молекул.

Запомним формулу (16). С ней связаны очень важные вопросы, относящиеся к возникновению квантовой теории. Мы их коснемся потом[1]. Но вот на что я хочу указать теперь же. Может показаться, что мы вывели основную формулу (16) кинетической теории газов из законов Ньютона. Но в действительности она из них не следует. Мы молча сделали одно предположение,— предположение о том, что существует определенное, одинаковое давление на все стенки сосуда. Если бы, скажем, скорости всех молекул были параллельны оси x, то не было бы давления на боковые стенки. Понадобилось, таким образом, кроме законов Ньютона, добавочное предположение. Такого рода постулат всегда необходим в кинетической теории газов.

---

[1] [См. 10-ю лекцию, а также 29-ю и 30-ю.]

Мы применили теорему вириала к идеальному газу. Но она очень хороша и для более сложных систем. Из нее следуют очень разнообразные и интересные вещи.

Рассмотрим общий случай консервативной системы, т. е. системы, в которой существует потенциальная энергия — функция U от координат, такая, что

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}.$$

Тогда

$$V = -\sum \overline{\frac{\partial U}{\partial x_i} x_i}.$$

Пусть потенциальная энергия есть однородная функция n-ой степени. По теореме Эйлера

$$\sum \frac{\partial U}{\partial x_i} x_i = nU,$$

так что

$$V = -n\bar{U}.$$

На основании (11) получается замечательное соотношение

$$2\bar{T} = n\bar{U}. \tag{17}$$

Если потенциальная энергия есть однородная квадратичная функция координат, то $n = 2$ и

$$\bar{T} = \bar{U}.$$

Возьмем случай взаимодействия по закону тяготения Ньютона или по закону Кулона. Здесь существует потенциальная энергия

$$U = \text{const} - \lambda \sum_{i \neq k} \frac{1}{2} \frac{m_i m_k}{r_{ik}},$$

где λ — гравитационная постоянная, m_i и m_k — массы материальных точек, r_{ik} — расстояния между ними; или же

$$U = \text{const} + \sum_{i \neq k} \frac{1}{2} \frac{e_i e_k}{r_{ik}},$$

где e_i и e_k — электрические заряды. Положим:

$$\text{const} = 0,$$

т. е. будем считать потенциальную энергию равной нулю тогда, когда взаимодействующие точки находятся на бесконечно большом расстоянии друг от друга. Тогда U есть однородная функция (—1)-ой степени, и согласно (17)

$$2\overline{T}=-\overline{U}. \tag{18}$$

Если все заряды одноименны (имеет место только отталкивание), то

$$U=\sum_{i\neq k}\frac{1}{2}\frac{e_i e_k}{r_{ik}}$$

— положительная величина. Но кинетическая энергия всегда положительна: мы приходим к противоречию с равенством (18). В чем же дело?

Применяя ту или иную теорему, нельзя забывать, при каких предположениях она выведена. При существовании только отталкивания движение заведомо таково, что координаты и скорости не остаются ограниченными. При выводе же теоремы вириала было сделано существенное предположение о финитности движения.

Если есть и положительно и отрицательно заряженные частицы, то для того, чтобы движения были финитными, нужно, грубо говоря, чтобы общий потенциал разноименных зарядов превышал общий потенциал одноименных.

Полная энергия системы

$$W=T+U=\overline{T}+\overline{U}.$$

Если, кроме того, выполняется равенство (18), то

$$W=-\overline{T}. \tag{19}$$

Таким образом, при кеплеровском движении полная энергия всегда отрицательна.

При распылении системы, в которой потенциал разноименных зарядов преобладает над потенциалом одноименных, потенциальная энергия растет. Следовательно, согласно (18) и (19) кинетическая энергия уменьшается, а общая энергия растет. Таким образом, на распыление системы требуется затрата работы извне.

Согласно теории относительности запас энергии системы связан с ее массой M соотношением:

$$M=\frac{W}{c^2}.$$

Если мы распыляем систему с преобладанием потенциала разноименных зарядов, мы всегда увеличиваем ее массу. В распыленном состоянии масса частиц, составляющих атом, обязательно больше, чем масса атома.

ДЕСЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(25/XI 1930 г.)

Применения теоремы вириала (продолжение). Пример Богуславского. Идеальный газ. Твердое тело. Статистический постулат Больцмана. Вычисление средней энергии осциллатора. Классическая теория теплоемкости твердого тела; ее неудовлетворительность. Равновесное излучение. Вопрос о распределении энергии в его спектре. Классическая теория; ее неудовлетворительность. Статистический постулат Планка; квантование энергии осциллатора.

Мы вывели теорему вириала

$$2\overline{T}=-V, \tag{1}$$

где V — вириал; T — кинетическая энергия системы. В тех случаях, когда потенциальная энергия U есть однородная функция координат, теорема вириала дает интересную зависимость между средней кинетической и средней потенциальной энергией:

$$2\overline{T}=n\overline{U}, \tag{2}$$

где n — степень однородной функции U. С другой стороны, всегда

$$\overline{T}+\overline{U}=W, \tag{3}$$

где W — полная энергия. Следовательно, если потенциальная энергия — однородная функция n-ой степени, то

$$\overline{T}=\frac{n}{n+2}W, \quad \overline{U}=\frac{2}{n+2}W.$$

Мы рассмотрели следствия из соотношений (1), (2) и (3) для системы частиц, взаимодействующих по законам Ньютона или Кулона. Рассмотрим еще один забавный пример, данный Богуславским[1]. Пусть мячик движется в поле силы тяжести, отражаясь от пола по законам упругого удара. Каково здесь соотношение между средней кинетической и средней потенциальной энергией? Силы, создающие вириал, здесь таковы: сила упругости F и сила тяжести. Вириал делится на два слагаемых:

$$V = V_{\text{упр}} + V_{\text{тяж}},$$

причем

$$V_{\text{упр}} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau F z\,dt = 0,$$

так как F отлична от нуля только в момент удара, когда $z = 0$. С силой тяжести связана потенциальная энергия

$$U = mgz.$$

Это однородная функция первого измерения ($n = 1$), и, следовательно, согласно (2)

$$\overline{T} = \frac{1}{2}\overline{U}.$$

Этот пример — не совсем игрушечный. Полученный результат можно распространить на атмосферу: в ней молекулы воздуха движутся под действием силы тяжести и упругих сил, появляющихся при соударениях. Здесь также средняя кинетическая энергия вдвое меньше, чем средняя потенциальная энергия.

Применяя теорему вириала к модели идеального газа без внешних сил (за исключением тех, которые действуют со стороны стенок сосуда), мы пришли в прошлой лекции к соотношению

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{3}{2}k\Theta,$$

где Θ — абсолютная температура. Так как средний квадрат

---

[1] [С. А. Богуславский. Основы молекулярной физики и применение статистики к вычислению термодинамических потенциалов, стр. 16. Научные известия, М., 1917.]

скорости молекул u есть сумма средних квадратов ее компонент u_1, u_2 и u_3 по трем осям координат, получаем:

$$m\overline{u_1^2} + m\overline{u_2^2} + m\overline{u_3^2} = 3k\Theta.$$

Если все направления равноправны, то три средние значения в левой части равны между собой, и, следовательно,

$$m\overline{u_1^2} = m\overline{u_2^2} = m\overline{u_3^2} = k\Theta.$$

Это можно выразить так: молекулы имеют три степени свободы, и кинетическая энергия T_1, приходящаяся на каждую степень свободы, имеет одно и то же среднее значение:

$$\overline{T_1} = \frac{k}{2}\Theta.$$

Постоянная Больцмана есть

$$k = \frac{R}{N}, \tag{4}$$

где

$$R = 8{,}31 \cdot 10^7 \text{ эрг/град} \tag{5}$$

(N — число молекул в одном моле). Если известно N, то из (4) можно найти постоянную Больцмана. О том, как находят число N, я сейчас говорить не буду. Измерения дают

$$N = 6{,}02 \cdot 10^{23}.$$

Из (4) и (5) следует, что

$$k = 1{,}38 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/град}.$$

Мы рассматривали газ как совокупность свободно летящих материальных точек. В кинетической теории большое значение имеет также другая модель: линейный осциллатор. Здесь, кроме кинетической энергии, имеется потенциальная энергия вида

$$U = \frac{\gamma x^2}{2},$$

где γ — положительная постоянная.

В истории физики линейный осциллатор сыграл огромную роль. На линейном осцилляторе — маятнике — развивалось понимание

основных законов механики. Лишь после этого смогли перейти к небесной механике. Квантовая физика возникла в связи с вопросом о средней энергии линейного осциллатора. Это была для нее первая пробная задача. Не удивительно поэтому, что мы придаем такое большое значение гармоническому осциллатору.

Механика развивалась на микроскопических телах, включая те, с которыми имеет дело астрономия. После того, как были установлены законы механики, возникла потребность проникнуть с их помощью в строение вещества. Овладев законами механики, стали переносить эти законы на процессы, происходящие в самих телах, с целью объяснить эти процессы. Предполагалось, что атомы подчиняются тем же законам, что и механические системы. При этом было достигнуто много успехов.

Первый успех — объяснение свойств идеального газа. Их объясняли так. Принимали, что молекулы — упругие шары, летящие, как свободные материальные точки и соударяющиеся между собой. С помощью этих ударов старались объяснить все явления в газах: теплопроводность, диффузию, внутреннее трение. Вторая задача, за которую взялись,— свойства твердого тела. Газ стоит на одном полюсе, твердое тело — на другом. Оно имеет определенную форму и строение.

Грубая модель твердого тела такова: каждый атом привязан какими-то силами к определенному положению равновесия. Если немного вывести атом из этого положения, то он ведет себя как осциллатор. Так как возможны все направления смещения в трех измерениях, то каждый атом грубо можно рассматривать как три независимых осциллатора. N атомов образуют $3N$ осциллаторов.

Так хотели понять твердое тело и, в частности, объяснить, как оно ведет себя при нагревании, найти его удельную теплоту — увеличение внутренней энергии при нагревании на 1°. Задача сводится к следующей: как зависит колебательная энергия осциллаторов от температуры?

Мы знаем механические законы движения осциллаторов. Можно ли отсюда получить ответ на поставленный вопрос? Нет, нельзя.

Законы механики недостаточны для ответа на любой вопрос такого рода. Они не дают ответа и на вопрос о том, как вообще движется то или другое тело. Только если задано, где тело находится в какой-нибудь момент времени и какова в этот момент его скорость, — только при этом условии законы механики указывают, что с ним будет в дальнейшем. На основании одних только

уравнений движения механики — без дополнительных данных — нельзя ответить ни на один механический вопрос.

Вернемся к нашим осциллаторам. Механика ничего не говорит о том, с какой энергией они движутся. Для ответа на этот вопрос необходимы еще какие-то данные, еще что-то нужно взять вне механики. Это „что-то" приходит извне с помощью новой гипотезы. Совокупность из такой гипотезы плюс механика носит название статистической механики. В вопросах статистической механики всегда, кроме механики, есть вещи, взятые вне ее.

Вопрос ставится так: как распределена энергия между отдельными атомами? Существует определенный рецепт, дающий ответ на этот вопрос. Я не могу останавливаться на том, как этот рецепт был получен, но не думайте, что его можно вывести из механики. Это нечто новое. Можно постулировать этот рецепт. Можно сделать другой статистический постулат и из него вывести этот рецепт. Но из механики его вывести нельзя.

В чем же заключается этот рецепт? Статистическая механика утверждает, что при термодинамическом равновесии осцилляторы имеют самые разнообразные значения энергии, причем эти значения распределены по закону Больцмана. Этот закон заключается в следующем. Возьмем на фазовой плоскости осциллятора (x, y) (x — координата; $y = m\dot{x}$ — импульс) площадку $dx\,dy$. Вероятность dp того, что осциллятор находится на этой площадке, пропорциональная величине площадки, зависит от энергии осциллятора W следующим образом:

$$dp = Ae^{-W/k\Theta}\,dx\,dy, \tag{6}$$

причем k — постоянная Больцмана, Θ — абсолютная температура.

Повторяю: из механики этот закон вывести нельзя. Его можно сделать лишь более или менее естественным. Гиббс получил его потом в качестве следствия более общей гипотезы.

Если тело состоит из осциллаторов, то вероятность того, что осциллятор находится в состоянии $(x, x+dx; y, y+dy)$ дается формулой (6), причем в данном случае

$$W = \frac{\gamma x^2}{2} + \frac{y^2}{2m}. \tag{7}$$

Наша задача будет заключаться в том, чтобы узнать, чему равняется энергия всего твердого тела. Механика плюс постулат (6) уже достаточны для решения поставленного вопроса.

Вычислим, какова средняя энергия осциллатора $\bar{W}$.

Если какая-нибудь величина имеет с вероятностью p_1 значение a и с вероятностью p_2 значение b, то ее среднее значение (или математическое ожидание) есть

$$\frac{ap_1 + bp_2}{p_1 + p_2},$$

причем $p_1 + p_2 = 1$.

Аналогичным образом

$$\bar{W} = \iint WAe^{-W/k\Theta}\, dx\, dy, \tag{8}$$

причем и здесь сумма вероятностей всех состояний также равна единице:

$$A\iint e^{-W/k\Theta}\, dx\, dy = 1. \tag{9}$$

Деля (8) на (9), находим:

$$\bar{W} = \frac{\iint We^{-W/k\Theta}\, dx\, dy}{\iint e^{-W/k\Theta}\, dx\, dy}. \tag{10}$$

Чтобы найти среднее значение энергии осциллатора, остается только произвести математические операции, указанные в формуле (9).

Введем обозначения:

$$1/k\Theta = \alpha, \quad I = \iint e^{-\alpha W}\, dx\, dy. \tag{11}$$

I есть функция параметра α. Мы можем написать вместо (10):

$$\bar{W} = -I'(\alpha)/I(\alpha). \tag{12}$$

Вычислим теперь $I(\alpha)$. Подставляя (7) в (11), получаем:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\int e^{-\alpha\left(\frac{y^2}{2m} + \frac{\gamma x^2}{2}\right)} dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha y^2}{2m}} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha\gamma x^2}{2}} dx.$$

Но, как известно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi},$$

и, следовательно,

$$l(\alpha)=2\pi\sqrt{\frac{m}{\gamma}}\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\nu\alpha}, \tag{13}$$

где ν — частота осциллатора.

Подставляя (13) в (12), получаем:

$$\overline{W}=\frac{1}{\alpha}=k\Theta.$$

Наш постулат приводит к выводу, что при равновесии средняя энергия осциллатора равна $k\Theta$. В свое время этот результат сыграл громадную роль.

В газе средняя кинетическая энергия поступательного движения на одну степень свободы равна $k\Theta/2$. Средняя кинетическая энергия осциллатора равна (при одной и той же температуре) средней кинетической энергии поступательного движения молекулы газа. Это получается независимо от того, каков период осциллатора. Поэтому здесь говорят о равномерном распределении кинетической энергии по степеням свободы. Один из основных законов классической статистической механики заключается в том, что в любой системе, находящейся в равновесном состоянии, средняя кинетическая энергия на любую степень свободы равняется $k\Theta/2$. Этот закон равномерного распределения пронизывает всю молекулярную физику прошлого столетия.

Один моль состоит из N атомов, и каждый атом твердого тела эквивалентен трем осциллаторам. Энергия одного моля твердого тела равна поэтому

$$E=3Nk\Theta,$$

а его удельная теплота

$$\frac{dE}{d\Theta}=3Nk=3R=5{,}99\ \text{кал/град}. \tag{14}$$

Получился замечательный теоретический результат. Удельная теплота одного моля твердого тела одинакова для всех веществ. Дюлон и Пти подтвердили на опыте, что удельная теплота, отнесенная к одному молю, имеет для твердого тела значение 6 кал/град, и долгое время все было хорошо. Но именно здесь, в классической теории, появилась первая брешь, заставившая задуматься о том, правильна ли вся теория.

По теории значение, даваемое формулой (14), должно быть справедливо при любой температуре. Опыт показывает, что для низких температур это абсолютно неверно. При низких температурах удельная теплота твердых тел очень мала. Но есть еще гораздо более глубокое противоречие. То, что имеется $3N$ осцилляторов, это — только первое приближение. Атомы излучают и поглощают свет. В атоме есть электроны, играющие роль излучателей. Электроны, находящиеся в атомах, сами являются осцилляторами. Таким образом число осциллаторов не $3N$, а гораздо больше. Система заведомо имеет гораздо больше, чем $3N$ степеней свободы. С другой стороны, мы показали, что средняя энергия осциллатора не зависит от частоты. Следовательно, удельная теплота должна быть гораздо больше, чем та, которую мы получили. Мы сами себя опровергли! Однако с помощью теоремы о равномерном распределении были получены отличные результаты. Здесь возник первый тяжелый конфликт (правда, большинству физиков он казался случайным).

Но не на этом фронте был дан генеральный бой. Почему? Тела сложны; они в разных случаях ведут себя по-разному. Теоретически рассуждать над телами неудобно. Бой был дан по вопросу о „черном излучении“. Постараемся понять, в чем произошла коренная ломка и к чему в результате пришли.

Можно поставить такую задачу: найти удельную теплоту пустоты (если выражаться немного парадоксально), или: найти удельную теплоту черного излучения.

Представим себе абсолютно черное тело, т. е. тело с такой поверхностью, что все падающее на него излучение поглощается (можно ли ее реализовать — это другой вопрос). Кирхгоф показал, что при данной температуре все черные тела испускают излучение одинаковой интенсивности и с одинаковым спектральным распределением. Возьмем теперь замкнутую полость. Там установится равновесное электромагнитное излучение. Термодинамика приводит к заключению, что характер излучения не зависит от того, каковы стенки. Возьмем полость с какими угодно стенками (не обязательно черными) и будем поддерживать их при определенной температуре. В полости установится равновесное излучение, имеющее вполне определенный спектр плотности энергии. При обычных температурах мы не увидим этого излучения, но при температуре 800—1000° все будет накалено, в полости будет яркий свет. Равновесное излучение в полости совпадает с излучением,

испускаемым черным телом при температуре полости. Его поэтому также называют черным излучением.

Определим, каково изменение энергии равновесного излучения при изменении температуры полости на 1°. В этом состоит вопрос об удельной теплоте черного излучения. Это — вполне реальный вопрос. В качестве ответа должен получиться универсальный закон. Он и практически очень интересен. Так, например, можно принять с известным приближением, что поверхность звезды есть поверхность абсолютно черного тела. Тогда, исследуя излучение от звезды, можно определить температуру ее поверхности.

Поставленный вопрос можно решить без всяких моделей, из термодинамических соображений. При этом получается знаменитый закон Стефана-Больцмана

$$E=\beta\Theta^4,$$

где β — постоянная. Но здесь интересно пойти дальше. В равновесном излучении представлены всевозможные цвета, всевозможные частоты. Как распределена энергия E по отдельным цветам? Какова энергия $\rho_\nu d\nu$, приходящаяся (в единице объема) на участок спектра от ν до $\nu+d\nu$, т. е. каково спектральное распределение черного излучения? Эта задача очень долго „не давалась".

Попробуем рассуждать по Планку. Внесем в полость осциллатор. Из электромагнитной теории Максвелла следует, что между плотностью излучения и средней энергией осциллатора имеется следующая связь:

$$\rho_\nu=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\overline{W}, \tag{15}$$

где c — скорость света в вакууме. Таким образом, если мы найдем среднюю энергию осциллатора $\overline{W}$, то мы сможем узнать ρ_ν. Но мы уже нашли, что при термодинамическом равновесии

$$\overline{W}=k\Theta$$

Допустим, что этот результат справедлив и здесь. Тогда

$$\rho_\nu=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}k\Theta. \tag{16}$$

Это — закон Релея—Джинса. Опыт показывает, что он справедлив для высоких температур и для низких частот, но катастро-

фически неверен для низких температур и для высоких частот. Если мы захотим найти, исходя из (16), полную энергию излучения E в единице объема, то мы получим:

$$E = \frac{8\pi k\Theta}{c^3} \int_0^\infty \nu^2 d\nu = \infty .$$

Вследствие того, что спектральная плотность ρ_ν неограниченно растет с частотой, получается, что при заданной температуре полная энергия бесконечно велика. Если же энергия E конечна, то она вся должна перекочевать в быстрые колебания. Это — не мелкая неприятность. Это — нелепость, показывающая несостоятельность всей теории. По теории получается, что при установлении равновесия между телом и излучением вся энергия тела перейдет в излучение. В этом состоит так называемая „фиолетовая катастрофа".

Вин дал для больших частот другую формулу:

$$\rho_\nu = A\nu^3 e^{-\lambda\nu/\Theta} \tag{17}$$

где A и λ — постоянные. Как Вин получил эту формулу? В сущности, он ее угадал, но мы не будем на этом останавливаться. Опыт показал, что для очень больших частот справедлив как раз этот закон. Он не приводит к противоречию с законом Стефана-Больцмана, но он не дает совпадения с опытом при низких частотах.

Планк постарался найти эмпирическую формулу, которая для малых частот переходила бы в формулу Релея—Джинса, а для больших — в формулу Вина. Планк нашел такую формулу. Вот она:

$$\rho_\nu = \frac{A\nu^3}{e^{\lambda\nu/\Theta} - 1} . \tag{18}$$

Легко убедиться, что для больших частот она переходит в (17), а для малых — в (16). Оказалось, что формула (18) очень хорошо совпадает с опытом для всех частот.

Планк решил ее вывести, объяснить, т. е. узнать, какие принципы к ней приводят. Он сделал при этом важнейший шаг в развитии физики. Он понял, что для того, чтобы получить эту формулу, необходимо что-то радикально изменить. Является ли путь Планка единственным? Этот вопрос оставался открытым.

Планк вернулся к исходным пунктам теории. Он оставил в силе соотношение (15) и сказал: весь вопрос — в нахождении $\overline{W}$.

В чем и как нужно изменить формулы (6) и (7)? Планк говорит: механика остается в силе, но нужно изменить начальные условия. Энергия осциллатора определяется начальными условиями. По принципу Больцмана возможна любая энергия. Планк противопоставил этому утверждение: энергия осциллатора может иметь только совершенно определенные значения, а именно:

$$0,\ h\nu,\ 2h\nu,\ 3h\nu,\ldots,$$

где h — некоторая постоянная. Это не выводится. Это — совершенно неожиданный „дикий" постулат. Механике он не противоречит, так как это — *статистический* постулат.

Энергия осциллатора

$$W=\nu S,$$

где S — площадь соответствующего эллипса на фазовой плоскости[1]. Поэтому постулат Планка можно сформулировать так: на фазовой диаграмме возможны только те эллипсы, для которых

$$S=nh\ (n=1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

Иначе говорят так: энергия осциллатора не может быть произвольной, она *квантуется*. Квант (доза) энергии равен $h\nu$; он тем больше, чем больше частота.

ОДИННАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(28/XI 1930 г.)

Вычисление средней энергии квантованного осциллатора. Квантовые формулы для спектральной плотности равновесного излучения и для энергии твердого тела. Понятие адиабатического инварианта. Адиабатическая инвариантность отношения средней кинетической энергии к частоте (на примерах).

Планк предположил, что энергия осциллатора может принимать только дискретный ряд значения

$$W=0,\ h\nu,\ 2h\nu,\ldots,\ nh\nu,\ldots, \tag{1}$$

причем вероятность того, что осциллатор обладает энергией $nh\nu$, т. е. находится в n-ом состоянии, есть

$$P_n=Ae^{-nh\nu/k\Theta}.$$

---

[1] [См. 9-ю лекцию.]

Вычислим, исходя из этого постулата, среднюю энергию осциллатора:

$$\overline{W}=\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu\cdot Ae^{-nh\nu/k\Theta}, \tag{2}$$

причем

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n=\sum_{n=0}^{\infty}Ae^{-nh\nu/k\Theta}. \tag{3}$$

Исключая A, получаем:

$$\overline{W}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-nh\nu/k\Theta}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/k\Theta}}.$$

Как и в предыдущей лекции, обозначим

$$\alpha=1/k\Theta. \tag{4}$$

Тогда

$$\overline{W}=I_1(\alpha)/I_0(\alpha), \tag{5}$$

где теперь

$$I_0=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nh\nu\alpha},\quad I_1=\sum_{n=0}^{\infty}nh\nu e^{-nh\nu\alpha}.$$

Нетрудно видеть, что

$$I_1(\alpha)=-I_0'(\alpha).$$

I_0 есть сумма геометрической прогрессии:

$$I_0(\alpha)=\frac{1}{1-e^{-h\nu\alpha}}. \tag{6}$$

Дифференцируя это выражение по α, получаем:

$$I_1(\alpha)=\frac{h\nu e^{-h\nu\alpha}}{(1-e^{-h\nu\alpha})^2}. \tag{7}$$

Подставляя (6), (7) и (4) в (5), мы приходим к следующему выражению для средней энергии осциллатора:

$$\overline{W}=\frac{h\nu}{e^{h\nu/k\Theta}-1}. \tag{8}$$

Здесь средняя энергия уже существенно зависит от частоты осциллатора. Подставляя выражение (8) в формулу для плотности энергии излучения:

$$\rho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\overline{W},$$

находим:

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/k\Theta}-1}.$$

Таким образом, гипотеза Планка приводит к формуле для спектральной плотности равновесного излучения, которая, как было сказано в прошлой лекции, находится (при соответствующем выборе константы h) в полном согласии с опытом.

Применим выражение Планка для $\overline{W}$ к задаче о теплоемкости твердого тела. Энергия твердого тела, состоящего из N атомов, колеблющихся около своих положений равновесия с одинаковой собственной частотой ν, равна

$$E = 3N\overline{W} = \frac{3N}{e^{h\nu/k\Theta}-1}. \tag{9}$$

Дифференцируя (9) по Θ, мы найдем выражение для теплоемкости, хорошо передающее качественный ход зависимости теплоемкости от температуры, наблюдаемый на опыте[1].

Если

$$h\nu/k\Theta \ll 1,$$

имеем приближенно:

$$W = \frac{h\nu}{\left(1+\frac{h\nu}{k\Theta}\right)-1} = k\Theta, \tag{10}$$

т. е. формула (9) переходит в классическую. Посмотрим, могут ли квантовые закономерности, т. е. отличие (9) от (10), быть заметными в случае макроскопических электромагнитных колебаний.

Так как $k = 1{,}38\cdot 10^{-16}$ эрг/град, имеем при $\Theta = 300°$ (грубо):

$$k\Theta = 4\cdot 10^{-14} \text{ эргов}.$$

---

[1] [См. 10-ю лекцию.]

Возьмем $\nu = 10^{10}$ сек$^{-1}$, что соответствует длине волны 3 см. Тогда, поскольку $h = 6{,}6 \cdot 10^{-27}$ эрг · сек, получаем (грубо):

$$h\nu = 6 \cdot 10^{-17} \text{ эргов;}$$

$$h\nu/k\Theta \sim 10^{-3} \ll 1.$$

Таким образом, здесь квантовые закономерности не будут сказываться; они лежат далеко за пределами чувствительности наших приборов.

Совсем иначе обстоит дело для видимого света. Возьмем длину волны $6 \cdot 10^{-5}$ см, т. е. $\nu = 5 \cdot 10^{14}$. Имеем (грубо):

$$h\nu = 3 \cdot 10^{-12};$$

$$h\nu/k\Theta \sim 100;$$

$$\overline{W} = k\Theta \cdot 100 \cdot e^{-100}.$$

Средняя энергия осциллатора ничтожно мала по сравнению с $k\Theta$.

Как было сказано в предыдущей лекции, осциллатор Планка движется по законам классической механики. Точка, изображающая движение осциллатора на фазовой плоскости, движется по эллиптической орбите. Энергия осциллатора на данной орбите постоянна; она задана квантовыми условиями (1).

Согласно классической электродинамике, электрон, совершающий гармоническое колебание, должен был бы излучать. Осциллатор Планка излучает только при переходе из одного состояния в другое; при этом частота его излучения та же, что и частота обращения по эллиптической орбите на фазовой плоскости, одинаковая для всех орбит.

Бор, исходя из ядерной модели атома, предложенной Резерфордом, перенес на атом квантовые представления Планка. Ему пришлось при этом оторвать частоту излучения от частоты обращения электрона по орбите.

При квантовании движения осциллатора Планк считал параметры осциллатора неизменными. Рассмотрим поведение осциллатора при очень медленных изменениях параметров, например поведение маятника при его укорочении. Энергия осциллатора будет меняться за счет работы, производимой над ним внешними силами при изменении параметра. Этот случай был разобран Релеем.

Оказывается, что при очень медленном изменении параметров осциллятора отношение W/ν остается постоянным. Таким образом, при медленном изменении параметров квантованный осциллятор сохраняет свою квантованность, т. е. условие

$$W/\nu = nh$$

остается в силе. Величина W/ν является, как принято выражаться, адиабатическим инвариантом гармонического осциллятора. (Адиабатическим инвариантом называют величину, остающуюся неизменной при медленном изменении параметров.)

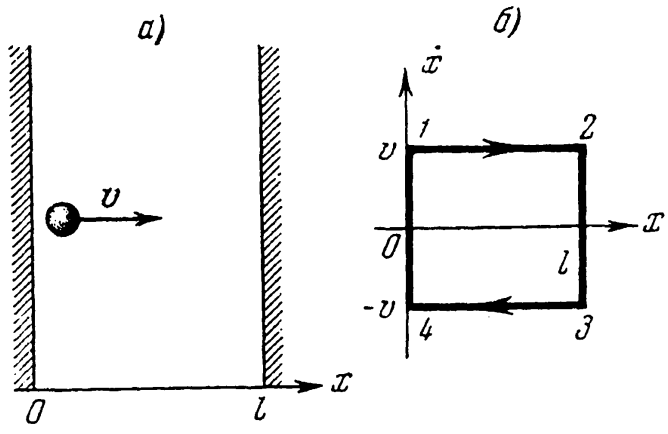


Рис. 32.

Рассмотрим случай шарика, движущегося по инерции между двумя стенками, находящимися друг от друга на расстоянии l (рис. 32, *а*), от которых он отражается по закону абсолютно упругого удара. Шарик совершает периодическое движение с неизменной по абсолютной величине скоростью $\pm v$. На фазовой плоскости движение изображается прямоугольником 1, 2, 3, 4 (рис. 32, *б*). Мы будем считать, что из 2 в 3 и из 4 в 1 совершается мгновенный перескок (на самом деле движение, конечно, сложнее).

Как изменится движение, если мы начнем очень медленно уменьшать параметр l, т. е. сближать стенки?

Применим теорему вириала[1]. Здесь

$$2\overline{T} = -\overline{V} = -\left\{\frac{1}{\tau}\int_0^\tau X' x_1 dt + \frac{1}{\tau}\int_0^\tau X'' x_2 dt\right\},$$

где X' и X'' — силы, действующие на шарик со стороны первой и второй стенки. Так как

$$x_1 = 0, \quad x_2 = l,$$

имеем:

$$2\overline{T} = -l\overline{X''},$$

или

$$\overline{X''} = -\frac{2\overline{T}}{l},$$

[1] [См. 9-ю лекцию.]

где $\overline{X''}$ — среднее значение силы за период (среднее значение силы, с которой шарик действует на стенку, есть $-\overline{X''}$).

При сближении стенок на $|\Delta l|$ $(\Delta l < 0)$ мы совершаем работу

$$\Delta A = -\frac{2\bar{T}}{l}\Delta l.$$

Эта работа равна увеличению средней энергии движения шарика:

$$\Delta \bar{T} = -\frac{2\bar{T}}{l}\Delta l,$$

откуда

$$\frac{\Delta \bar{T}}{\bar{T}} = -2\frac{\Delta l}{l}. \tag{11}$$

Период движения шарика есть

$$\tau = \frac{2l}{v}. \tag{12}$$

Изменение его, вследствие сближения стенок, равно

$$\Delta\tau = 2\frac{\Delta l \cdot v - l \cdot \Delta v}{v^2}. \tag{13}$$

Из (12) и (13) получаем:

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta v}{v}. \tag{14}$$

В данном случае

$$2\bar{T} = mv^2, \quad \Delta\bar{T} = mv\Delta v,$$

т. е.

$$\frac{\Delta\bar{T}}{\bar{T}} = 2\frac{\Delta v}{v}. \tag{15}$$

Подставляя в (14) $\frac{\Delta l}{l}$ из (11) и $\frac{\Delta v}{v}$ из (15), получаем:

$$\Delta\tau \cdot \bar{T} + \tau \cdot \Delta\bar{T} = 0,$$

т. е.

$$\bar{T}\tau = \text{const},$$

или

$$\frac{2\bar{T}}{\nu} = \text{const}, \tag{16}$$

где

$$\nu = 1/\tau$$

есть частота колебаний шарика.

Площадь цикла на фазовой плоскости равна

$$S = 2mvl = mv^2 \frac{2l}{v} = 2\bar{T}\tau = \frac{2\bar{T}}{\nu}.$$

Это — частный случай полученного ранее соотношения[1]. На основании (16) имеем:

$$S = \text{const},$$

— площадь цикла есть адиабатический инвариант.

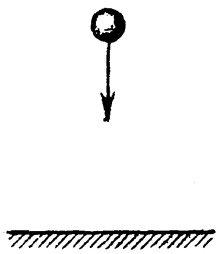


Рис. 33.

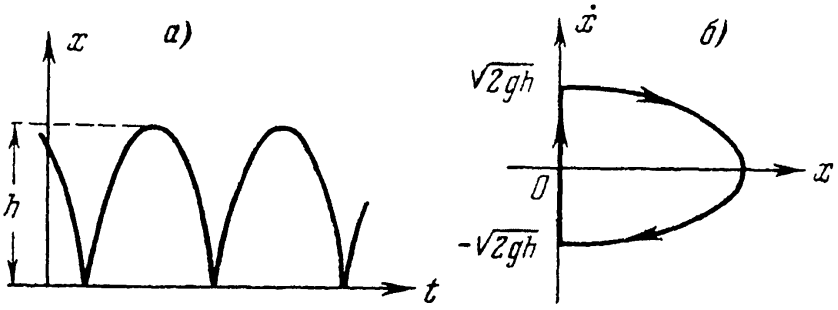


Рис. 34.

Можно рассмотреть аналогичную задачу для немного более сложного случая (рис. 33): упругий мячик движется вертикально под действием силы тяжести, отскакивая от горизонтального стола, причем ускорение тяжести (параметр) медленно меняется. Здесь график зависимости координаты от времени и траектория на фазовой плоскости имеют вид, показанный соответственно на рис. 34, *а* и *б*. Применяя теорему вириала, мы найдем также и здесь, что

$$\frac{2\bar{T}}{\nu} = \text{const}.$$

Рассмотрим колебательный контур (рис. 19), емкость которого медленно изменяется (раздвигаются пластины конденсатора). Здесь

$$T = \frac{L\dot{Q}^2}{2}, \quad U = \frac{Q^2}{2C},$$

[1] [См. 9-ю лекцию.]

где Q — заряд конденсатора, меняющийся по закону

$$Q = A \sin(\omega t + \varphi),$$

причем

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}.$$

Закон сохранения энергии нам дает:

$$\frac{L\dot{Q}^2}{2} + \frac{Q^2}{2C} = W = \text{const}.$$

На фазовой плоскости $(Q, L\dot{Q})$ изображающая точка описывает эллипс с полуосями

$$\sqrt{2CW}, \quad \sqrt{2LW}.$$

Вычислим работу, совершаемую над конденсатором при изменении емкости. В каких случаях работа, потребная для изменения емкости, равна изменению энергии конденсатора $Q^2/2C$? Тогда, когда работа целиком идет на изменение этой энергии. Так обстоит дело, если конденсатор изолирован и, следовательно, его заряд Q остается постоянным.

Пусть мы изменили емкость изолированного конденсатора на dC, раздвинув или сблизив пластины. Работа раздвижения пластин изолированного конденсатора

$$dA = dU = d\frac{Q^2}{2C} = -\frac{Q^2}{2C^2}dC = -\frac{U}{C}dC$$

(положительная работа $dA > 0$ соответствует $dC < 0$, т. е. раздвижению пластин). Но можно утверждать большее, а именно: работа раздвижения *всегда* выражается формулой

$$dA = -\frac{U}{C}dC, \tag{17}$$

так как сила, действующая между пластинами, не зависит от того, изолированы они или нет (последнее имеет место, например, если они соединены с источником постоянного напряжения). Но рассмотрение изолированного конденсатора позволяет получить формулу (17) наиболее просто.

Если изменение параметра очень медленное, то можно считать величину $\dot{C}/C$ постоянной в течение одного периода колебаний. Тогда работа, совершаемая за период колебаний τ, будет

$$\Delta A = -\frac{\dot{C}}{C}\int_0^\tau U dt = -\frac{\dot{C}}{C}\overline{U}\tau. \tag{18}$$

Но

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\Delta C}{\tau}, \tag{19}$$

где ΔC — изменение емкости за время τ. Подставляя (19) в (18), получаем:

$$\Delta A = -\frac{\Delta C}{2}\overline{U} = -\frac{\Delta C}{2}\frac{W}{C}.$$

Эта работа пошла на увеличение полной энергии W:

$$\Delta W = -\frac{\Delta C}{2}\frac{W}{C},$$

или

$$\frac{\Delta W}{W} = -\frac{\Delta C}{2C}. \tag{20}$$

С другой стороны,

$$\tau = 2\pi\sqrt{LC},$$

откуда

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\Delta C}{2C}. \tag{21}$$

Сравнивая (21) и (20), получаем:

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} + \frac{\Delta W}{W} = 0. \tag{22}$$

В нашем случае (гармонический осциллатор)

$$W = 2\overline{T},$$

и, следовательно, на основании (22) мы снова получаем:

$$\frac{2\overline{T}}{\nu} = \text{const}.$$

Во всех рассмотренных нами случаях отношение средней кинетической энергии к частоте является адиабатическим инвариантом. Этот результат был обобщен на любую консервативную систему с одной степенью свободы [1].

[1] [Обобщение на случай n степеней свободы см. С. М. Рытов, Труды ФИАН, т. 2, вып. 1, стр. 41. Изд-во АН СССР, 1939].

ДВЕНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(5/XII 1930 г.)

Адиабатические инварианты (окончание): квантование осциллатора по Планку и теория адиабатических инвариантов; гипотеза Эренфеста. Квантование осциллатора в волновой механике. Колебательные системы с одной степенью свободы с учетом трения (сопротивления). Отрицательное сопротивление и второй закон термодинамики. Коэффициент полезного действия процесса зарядки конденсатора аккумуляторной батареей. Затухающие колебания: коэффициент затухания; логарифмический декремент. Маятник Фроуда.

Вернемся к адиабатическим инвариантам и при этом кое-что дополним и подчеркнем.

Речь шла о применении классической механики к объяснению некоторых молекулярных явлений.

Механика не содержит в себе всех элементов, необходимых для объяснения этих явлений. Она не отвечает на вопрос: как движется тело? Механика отвечает только на вопрос: как движется тело, *если заданы начальная скорость и начальное положение*? Начальные положения и начальные скорости мы знаем — или можем узнать — в случае макроскопических тел. В микрокосмосе должен быть введен некоторый новый постулат. Естественно указать *вероятности* различных состояний микросистем (молекул, атомов). Здесь натолкнулись на следующую трудность. Если принять, что все начальные состояния возможны, и в согласии с этим предположением построить теорию черного излучения и теорию твердого тела, то получается грубое противоречие с опытом. Чтобы построить удовлетворительную теорию, нужно что-то в корне изменить, сделать какой-то решающий шаг. Планк сделал его — не в механике, а в статистике. Планк считал, что осциллатор движется по классическим законам, но начальные состояния не произвольны, а таковы, что энергия отдельного осциллатора

$$W = nh\nu \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

На основе этого предположения была создана новая статистика и это дало блестящие результаты.

Однако нужно было отнестись к ним критически. Нужно было выяснить, как новые результаты уживаются с другими, твердо установленными. Как бы хорошо ни оправдывалась на опыте новая теория, все же оставалась известная неудовлетворенность,

какое-то неприятное состояние. Тут и возник тот вопрос, который мы теперь разбираем.

Будем считать, что осциллатор движется по законам классической механики. Следуя Планку, будем считать, что

$$\frac{W}{\nu} = nh. \tag{1}$$

Возьмем другой осциллатор, с другой энергией W' и с другой частотой ν'. Мы снова пишем:

$$\frac{W'}{\nu'} = nh.$$

Все это не противоречит механике (повторяю: механика о начальных состояниях ничего не говорит). Но мы можем себе представить другую постановку задачи. Сначала мы задали определенные начальные условия. Затем мы начали медленно менять параметры осциллатора. Наконец, параметры мы опять зафиксировали. Все это — *одна* механическая задача. Здесь все однозначно определено начальными условиями. Посмотрим, какова энергия осциллатора в конце процесса изменения параметров. Теперь мы не вольны отвечать на этот вопрос независимо от механики. Лоренц говорит[1]: вследствие изменения параметра произошло изменение частоты; поэтому условие (1) теперь нарушено. Представим себе маятник. Начальные условия таковы, что он квантован. Затем мы начали его медленно укорачивать. В результате перед нами короткий маятник. Может случиться, говорит Лоренц, что этот короткий маятник не квантован. Конечно, это рассуждение предполагает, что классическая механика остается справедливой. В нем заключена такая мысль: два независимых осциллатора с частотами ν и ν' мы имеем право квантовать, но если мы переводим один в другой, хотя бы сколь угодно медленно, то нет этой свободы, — мы связаны классической механикой. Все направление мысли здесь таково, что для медленных изменений параметра сохраняется классическая механика.

На это можно ответить так: откуда известно, что при медленном изменении параметра нарушается условие (1)? Изменяя пара-

---

[1] [H. A. Lorentz. La théorie du rayonnement et les quanta. Rapports et discussions de la Réunion tenue à Bruxelles. 1911. Стр. 450. Париж, Готье-Вилар, 1912.]

метр, мы совершаем некоторую работу и, следовательно, изменяем энергию системы. В начале частота осциллатора была ν. Мы задали начальную энергию W, равную $nh\nu$. Откуда мы знаем то, что новая энергия W' не окажется равной $nh\nu'$? Может быть, работа совершена как раз такая, какая нужна, чтобы новое значение энергии было равно $nh\nu'$?

Здесь возникает чисто механическая задача: дана система с одной степенью свободы; мы изменяем ее параметры, и при этом изменяются период и энергия; какие функции этих величин остаются постоянными?

Эту механическую задачу решил Больцман. Он показал, что есть величина, которая при медленном изменении параметров остается постоянной, и указал эту величину. В общем случае это не W/ν, а

$$\frac{2\overline{T}}{\nu}, \tag{2}$$

где $\overline{T}$ — среднее значение кинетической энергии. Эта чисто механическая теорема сразу устраняет неприятности в квантовой теории, связанные с изменением параметра.

Величины, которые остаются неизменными при медленном изменении параметра, называются адиабатическими инвариантами. О них подробно говорилось в связи с рядом примеров в прошлой лекции.

Планк квантовал не величину (2), а величину (1), — полную энергию, деленную на частоту. Он не думал о том противоречии, возможность которого мы обсуждаем. Планк рассматривал частный случай — гармонический осциллатор. Для него „случайно“ Планк правильно угадал, как надо квантовать: отношение W/ν равняется для гармонического осциллатора $2\overline{T}/\nu$. Во многих случаях (а именно: если потенциальная энергия — однородная функция) существует постоянное отношение между полной энергией и средней кинетической энергией[1]. Но возможны случаи — и это самые распространенные случаи, — когда не существует такого постоянного отношения. Например, для маятника с большой амплитудой W и $2\overline{T}$ не находятся в постоянном отношении. Там W/ν не является адиабатическим инвариантом.

После того, как все это выяснилось, начали поступать наоборот. Стали разыскивать величины, являющиеся адиабатическими

[1] [См. 10-ю лекцию.]

инвариантами и их квантовать. Так, например, маятник — нелинейная система, и здесь нужно квантовать $2\overline{T}/\nu$. Теория адиабатических инвариантов показала, таким образом, что у Планка нет противоречий с механикой. С другой стороны, она помогла дальнейшему развитию квантовой теории. Конечно, указание на то, что квантовать нужно величины, являющиеся адиабатическими инвариантами, было только гипотезой. Эта гипотеза была высказана Эренфестом.

Следует ясно себе представлять, что существование адиабатических инвариантов ничего общего с квантами не имеет. О нем знал уже Больцман, и интересовался он адиабатическими инвариантами в связи с чисто механическими вопросами. Он исходил из желания — это было давно, до квантов — свести тепловые явления на механические.

Итак, теорема об адиабатических инвариантах есть чисто механическая теорема. Она имеет прямое отношение к теории колебаний. Это — теорема теории колебаний, относящаяся к медленным изменениям параметров консервативных систем. В дальнейшем пришлось отказаться от планковской установки на удержание классической механики и на дополнение ее правилами квантования. Современная волновая механика создана путем отказа и от самой классической механики, но теория адиабатических инвариантов имеет большое значение и там.

Я не буду здесь говорить о всей концепции волновой механики и ограничусь лишь тем, что она изменила в вопросе о гармоническом осциллаторе. Она утверждает, как и Планк, что энергия гармонического осциллатора принимает лишь ряд дискретных значений. Но, по Планку, эта энергия может иметь значения

$$0,\ h\nu,\ 2h\nu,\ \ldots$$

(существенно, что осциллатор может иметь энергию, равную нулю). Согласно же современной волновой механике, состояния с энергией, равной нулю, не существует. Энергия гармонического осциллатора равна

$$W=\left(n+\frac{1}{2}\right)h\nu \qquad (n\text{ — целое}),$$

т. е. равна

$$\frac{h\nu}{2},\ \frac{3h\nu}{2},\ \frac{5h\nu}{2},\ \ldots$$

При абсолютном нуле температуры все осциллаторы имеют наинизшую энергию $h\nu/2$. Наличие этой „энергии абсолютного нуля" чрезвычайно типично для волновой механики. Оно приводит к далеко идущим следствиям.

Перейдем теперь снова к более прозаическим вещам.

Вернемся к резонатору с одной степенью свободы, но отбросим часть сделанных ранее идеализаций. До сих пор мы считали, что маятник имеет кинетическую и потенциальную энергию (контур — магнитную и электрическую), причем от их превращения в теплоту мы отвлекались (рассматривая контур, мы вводили параметры L и C, но не вводили сопротивления). Отсюда следовало, что процесс колебаний повторяется периодически. Но в действительности при колебаниях всегда развивается теплота. Маятник всегда имеет трение, контур — сопротивление. Учет трения или сопротивления приводит к теории затухающих колебаний.

Будем исходить из закона сохранения энергии. В случае колебательного контура

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{Q^2}{2C}+\frac{Li^2}{2}\right)+Ri^2=0 \tag{3}$$

(за единицу времени в электрическом контуре рассеивается энергия Ri^2).

Проводя в (3) дифференцирование и принимая во внимание, что

$$\frac{dQ}{dt}=i,$$

мы получаем дифференциальное уравнение

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=0. \tag{4}$$

Аналогичное уравнение для механической системы имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda\frac{dx}{dt}+kx=0. \tag{5}$$

Оно получается в предположении, что энергия, превращаемая в теплоту в единицу времени, пропорциональна квадрату скорости, т. е. в предположении, что сила трения пропорциональна скорости. При малых скоростях закон трения (например, сопротивления воздуха) очень близок к этому. Но при больших скоростях, например для снаряда, уже ничего подобного не получается.

В случае вращательного движения мы найдем при аналогичных предположениях уравнение

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\mu\frac{d\varphi}{dt}+D\varphi=0, \tag{6}$$

где I — момент инерции, D — момент упругой силы при отклонении на угол $\varphi=1$, а μ — момент силы трения при угловой скорости $\dot{\varphi}=1$.

Уравнения (4), (5) и (6) мы запишем в общем виде:

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2x=0. \tag{7}$$

Здесь ω_0 — циклическая частота того процесса, который происходил бы в системе в отсутствие трения.

Мы считаем, что $\delta>0$, т. е. что сила трения всегда действует *против* движения. При этом во время колебаний электрическая и магнитная энергия (или кинетическая и потенциальная) превращаются в теплоту. Может ли δ быть отрицательным? При отрицательном трении энергия входила бы в систему, происходило бы превращение теплоты в электрическую и магнитную (кинетическую и потенциальную) энергию. Это не противоречит первому закону термодинамики, но противоречит *второму*.

Если бы было $\delta<0$, мы могли бы заставить контур колебаться за счет энергии окружающего „теплового резервуара“, мы могли бы с помощью периодического процесса черпать энергию у одного резервуара и превращать ее в работу: осуществилось бы perpetuum mobile второго рода. К сожалению, этого сделать нельзя. Поэтому мы должны считать *постулативно*, что *если нет другого источника энергии*, то $\delta>0$. Этим вовсе не сказано, что ни при каких условиях не может быть $\delta<0$. Системы с $\delta<0$ существуют, и они, может быть, даже важнее тех, где $\delta>0$. В дальнейшем мы рассмотрим и системы с $\delta<0$.

Обратим теперь внимание на такой вопрос. Прежде чем разрядить конденсатор, надо его зарядить, например с помощью аккумуляторной батареи (рис. 35). Как написать дифференциальное уравнение для процесса зарядки? Рассмотрим более общий случай разветвленной цепи (например, рис. 36).

Для составления уравнений разветвленной цепи закон сохранения энергии недостаточен. Здесь нужно воспользоваться первым и вторым законами Кирхгофа, учтя, что падения напряжения на

индуктивностях и емкостях имеют вид $L\frac{di}{dt}$ и $\frac{Q}{C}$. Я не буду обосновывать этот общий рецепт составления уравнений электрических цепей. Его обосновать не так просто, ибо, строго говоря, здесь неправильно пользоваться понятием потенциала или напряжения, так как электрическое поле не является здесь статическим.

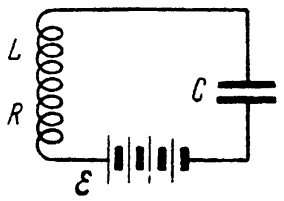


Рис. 35.

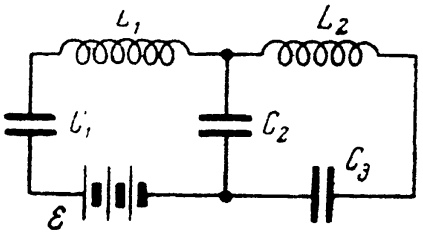


Рис. 36.

Для простого контура (рис. 19) мы придем, пользуясь законами Кирхгофа, к прежнему уравнению:

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{Q}{C}=0.$$

В случае же зарядки прибавляется еще постоянная электродвижущая сила батареи $\mathcal{E}$:

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{Q}{C}=\mathcal{E}. \tag{8}$$

Из уравнения (8) вытекает очень интересное и практически чрезвычайно важное следствие. Его можно очень просто вывести из самого уравнения, не прибегая к решению (часто решить уравнение бывает трудно, но можно получить некоторые важные результаты из самого уравнения[1]).

Умножим уравнение (8) на $i=\frac{dQ}{dt}$:

$$Li\frac{di}{dt}+Ri^2+\frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt}=\mathcal{E}i,$$

и проинтегрируем от 0 до t:

$$\frac{Li_t^2}{2}-\frac{Li_0^2}{2}+R\int_0^t i^2dt+\frac{Q_t^2}{2C}-\frac{Q_0^2}{2C}=\mathcal{E}\int_0^t i\,dt. \tag{9}$$

[1] [Ср. 27-ю лекцию.]

В случае зарядки начальные условия при $t=0$ таковы:

$$i_0=0,\ Q_0=0. \tag{10}$$

При $t=\infty$ имеем:

$$i_t=i_\infty=0,\ Q_t=Q_\infty=C\mathcal{E}, \tag{11}$$

причем

$$\int_0^\infty i\,dt=Q_\infty. \tag{12}$$

Подставляя (10), (11) и (12) в (9), получаем:

$$R\int_0^\infty i^2dt+\frac{C\mathcal{E}^2}{2}=C\mathcal{E}^2,$$

или

$$R\int_0^\infty i^2dt=\frac{C\mathcal{E}^2}{2}. \tag{13}$$

Половина энергии, отдаваемой батареей, уходит на зарядку конденсатора, а другая половина превращается в теплоту. Можно как угодно менять сопротивление и индуктивность контура, коэффициент полезного действия при рассматриваемом способе зарядки всегда будет равен $^1/_2$. Это — самый невыгодный способ зарядки, какой только существует.

Результат (13) относится к случаю, когда мы в один прием заряжаем конденсатор до конца, до разности потенциалов $\mathcal{E}$. Но можно осуществить зарядку постепенно, порциями. К. п. д. оказывается тогда выше. Убедимся в этом.

Если конденсатор уже имеет начальный заряд $Q_0=C\mathcal{E}_0$ [в отличие от (10)], то при включении электродвижущей силы $\mathcal{E}>\mathcal{E}_0$ на него перетечет заряд ($t\to\infty$)

$$\int_0^t i\,dt=C(\mathcal{E}-\mathcal{E}_0).$$

Пользуясь этими выражениями вместо (10) и (12), нетрудно получить из (9), что

$$R\int_0^\infty i^2dt=\frac{C(\mathcal{E}-\mathcal{E}_0)^2}{2}.$$

Будем производить зарядку n ступенями, повышая каждый раз электродвижущую силу на величину $\mathcal{E}/n$ и выжидая, когда ток (практически) прекратится. Тогда теплота, развиваемая за один шаг, будет

$$q_1 = \frac{C}{2}\left(\frac{\mathcal{E}}{n}\right)^2,$$

а полная теплота за все n шагов

$$q = nq_1 = \frac{C\mathcal{E}^2}{2n}.$$

Мы видим, что с ростом n (и соответственно с замедлением процесса зарядки, до окончательного потенциала $\mathcal{E}$) потери уменьшаются и к. п. д. стремится к единице. Физически это понятно: сила тока при каждом шаге, грубо говоря, в n раз меньше, чем при единовременной зарядке, а теплота квадратична относительно тока. Отсюда и получается выигрыш в n раз, но вместе с тем и замедление процесса примерно в n раз.

Из уравнения (7) можно получить полную картину колебательного процесса. Характер решения зависит от того, каков дискриминант характеристического уравнения. Если

$$\omega_0^2 > \delta^2,$$

то общее решение имеет вид

$$x = Ae^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi), \tag{14}$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \tag{15}$$

— действительная величина, а A и φ — произвольные постоянные.

Если

$$\omega_0^2 < \delta^2,$$

то общее решение таково:

$$x = Ae^{-m_1 t} + Be^{-m_2 t},$$

где m_1 и m_2 — действительные величины, а A и B — произвольные постоянные. Этот случай мы пока рассматривать не будем[1].

---

[1] [См. 14-ю лекцию.]

Решение (14) — осциллаторное (рис. 37). Оно имеет бесконечное множество максимумов и минимумов. Но оно не периодическое: не существует такого τ, чтобы при любом t было

$$x(t+\tau)=x(t).$$

Однако нули функции $x(t)$ повторяются через равные промежутки времени.

Обозначим:

$$\tau=\frac{2\pi}{\omega}, \quad \nu=\frac{\omega}{2\pi}.$$

Величину τ принято называть периодом, хотя это и неправильно; повторяю: периода здесь нет.

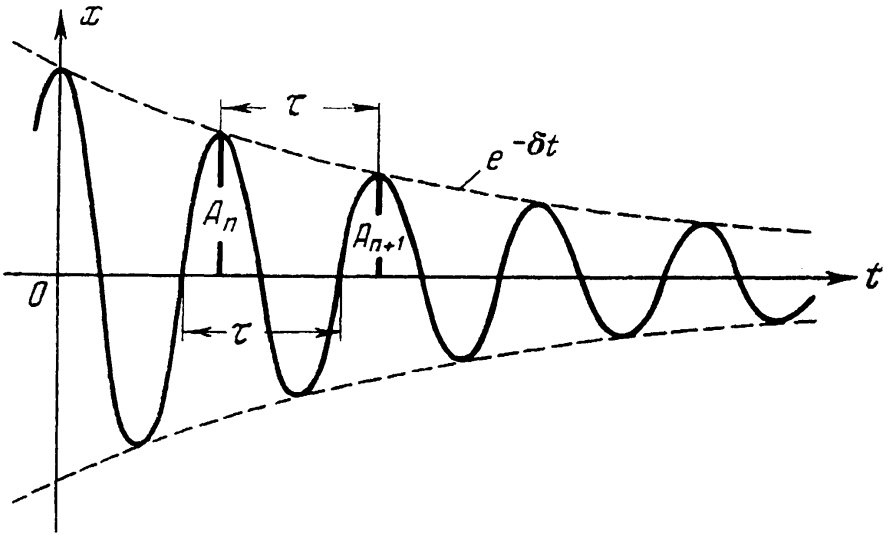


Рис. 37.

Промежуток времени между последовательными максимумами $x(t)$ тоже постоянен и равен τ; поэтому „период“ здесь имеет двойной смысл. Максимумы находятся не посредине между нулями, а сдвинуты влево; но если $\delta \ll \omega_0$, то сдвиг очень мал. Если δ очень мало, то в течение некоторого времени система ведет себя приблизительно так, как если бы затухания не было. В ее внешних действиях часто проявляются черты, характерные для незатухающих колебаний. Но в других случаях имеется существенное отличие между слабо затухающими и незатухающими колебаниями. Для некоторых задач можно считать, что (14) есть „синусоидальное колебание с переменной амплитудой“.

Величина δ имеет размерность, обратную времени. Ее называют *коэффициентом затухания*. Если он мал, то убывание амплитуды происходит медленно.

Каково отношение двух последовательных амплитуд (т. е. максимумов)? Обозначив их через A_n и A_{n+1} (рис. 37), имеем:

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{\delta\tau}.$$

Разность логарифмов этих величин есть

$$d = \ln A_n - \ln A_{n+1} = \delta\tau. \tag{16}$$

Эту безразмерную величину называют *логарифмическим декрементом* (иногда называют логарифмическим декрементом половину этой величины, но я предпочитаю называть логарифмическим декрементом $\delta\tau$).

Фаза φ и начальная амплитуда A колебания (14) задаются начальными условиями, система же задает „период“ τ и логарифмический декремент d.

Чтобы хорошо понять физический смысл логарифмического декремента, нужно „вработаться“ в это понятие.

Пусть начальная амплитуда равна A. Через n периодов амплитуда будет Ae^{-nd}. Подождем пока будет $e^{-nd} = e^{-1}$, т. е. амплитуда уменьшится в e раз (грубо — в 3 раза). Это будет тогда, когда $nd = 1$, т. е. число „периодов“, протекшее от начала процесса, станет равно

$$n = \frac{1}{d}.$$

Таким образом, обратная величина логарифмического декремента есть число периодов, по истечении которого амплитуда уменьшается в e раз.

Можно дать логарифмическому декременту другое физическое толкование. Пусть система колеблется. Вследствие затухания, ее энергия постепенно уменьшается. Пусть в некоторый момент система имеет энергию W_0, а через „период“ τ — энергию W_1. Как показывает простой расчет,

$$\frac{W_0 - W_1}{W} = 2d, \quad \text{где} \quad W = \frac{W_0 + W_1}{2}.$$

Удвоенный логарифмический декремент равен отношению убыли энергии за „период“ к среднему значению энергии за „период“.

Приведу некоторые числа. Хороший камертон имеет d порядка 1/10 000. Это значит, что примерно через 10 тысяч колебаний его

амплитуда уменьшится до $^1/_3$. Без специальных приемов[1] нельзя осуществить электрический контур с таким малым декрементом; здесь в лучшем случае добивались $d \approx 0{,}2$.

Конечно, изолированный камертон осуществить нельзя: его колебания передаются другим телам. Равным образом электрический контур всегда излучает волны. Теория показывает, что обусловленные этим потери можно приближенно учесть, как увеличение логарифмического декремента.

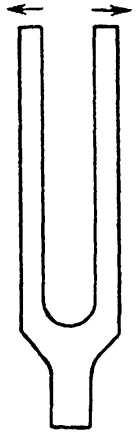


Рис. 38.

Камертон и замкнутый электрический контур излучают очень плохо. Чем это объясняется? Стержни камертона создают последовательность сгущений и разрежений воздуха, но стержни колеблются в противоположных фазах: в тот момент, когда один из стержней камертона движется вправо, другой движется влево (рис. 38). Происходит взаимное погашение излучений стержней (интерференция). Камертон излучает гораздо меньше, чем сумма энергий, которые излучала бы каждая из его ножек в отдельности. Совершенно такая же компенсация излучений отдельных элементов происходит в случае замкнутого электрического контура (рис. 39). Конечно, компенсация происходит не полностью; некоторое излучение остается. Для вопросов резонанса, воздействия внешней силы на контур, интересно знать, как зависит „частота“ ω от затухания. Из (15) и (16) получаем:

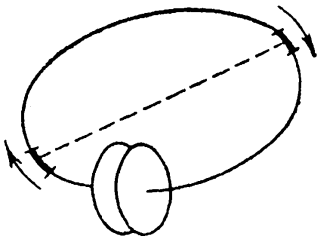


Рис. 39.

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{d^2}{4\pi^2}}.$$

Таким образом, малое затухание изменяет „частоту“ только во втором порядке. Пусть

$$\frac{d^2}{4\pi^2} \ll 1.$$

Тогда приближенно

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{d^2}{8\pi^2}\right).$$

Если, например, $d = 0{,}1$ (это *большой* логарифмический декремент), то частоты ω и ω_0 различаются всего на 1/8000. Таким образом,

[1] [См. 13-ую лекцию.]

даже при больших декрементах разница между ω и ω_0 еще ничтожна. В этой связи следует упомянуть о пьезокварцевых пластинках. Если заряжать обкладки такой пластинки, то она сжимается или расширяется; если ее сжимать, обкладки заряжаются. С пьезокварцем можно делать чудеса. Он позволяет осуществлять системы с чрезвычайно малым логарифмическим декрементом, например $d = 1/50000$. Если логарифмический декремент кварца порядка 10^{-4}, то приблизительно через 10 тысяч колебаний амплитуда уменьшится до $^1/_3$. При частоте 10^6 колебаний в секунду это произойдет через $^1/_{100}$ секунды.

Вернемся к вопросу о том, возможны ли системы с отрицательным затуханием. Посмотрим, что это физически значит, к каким следствиям это приводит. Начнем с простой механической системы — маятника Фроуда. Это, как мы увидим, аналог самого простого типа генератора с катодными лампами, применяемого в беспроволочной телеграфии.

Маятник жестко скреплен со втулкой, насаженной на равномерно вращающийся вал. Втулка захватывается трением, и маятник отклоняется. Напишем дифференциальное уравнение движения маятника:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\mu\frac{d\varphi}{dt} - D\varphi + D_1.$$

Оно отличается от (6) членом D_1, выражающим момент силы трения, действующий на втулку со стороны вала. Этот момент зависит от их относительной угловой скорости $u - \dot{\varphi}$, т. е. при заданной угловой скорости вала u — от угловой скорости маятника $\dot{\varphi}$:

$$D_1 = f(u - \dot{\varphi}).$$

Вид функции f должен быть задан опытом.

ТРИНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(8/XII 1930 г.)

Затухающие и нарастающие колебания в линейной системе. Маятник Фроуда (продолжение). Ламповый генератор. Невозможность незатухающих колебаний в линейной неконсервативной системе. Нелинейная задача о системе с постоянным трением. Разрывная идеализация характеристики электронной лампы.

В теории колебаний терминология еще плохо установилась даже в самых основных вещах. Величину $d = \delta\tau$ называют обычно логарифмическим декрементом, величину δ — коэффициентом затухания. Гаусс называл логарифмическим декрементом величину $\delta\tau/2$.

Если δ отрицательно, формулы, полученные в прошлой лекции, остаются справедливыми, но весь процесс — существенно другой. Вместо затухания получается нарастание колебаний, идущее беспредельно. Вопрос заключается в том, существуют ли физические системы, у которых δ отрицательно, или это математическая фикция?

На предыдущей лекции мы получили для маятника со втулкой, насаженной на вращающуюся ось, нелинейное, дифференциальное уравнение

$$\ddot{\varphi} + \mu\dot{\varphi} + D\varphi = f(u - \dot{\varphi}). \tag{1}$$

Из опыта мы знаем, что с ростом скорости трение в некотором интервале убывает:

$$f'(u) < 0.$$

Посмотрим сначала, что будет, если колебания очень малы. Тогда приближенно

$$f(u - \dot{\varphi}) = f(u) - f'(u)\dot{\varphi},$$

и уравнение (1) принимает вид

$$I\ddot{\varphi} + [\mu + f'(u)]\dot{\varphi} + D\varphi = f(u).$$

Это линейное уравнение с постоянными коэффициентами, но оно имеет постоянную правую часть. Если $f(u) = 0$, то уравнение однородно. При этом существует решение $\varphi = 0$ — состояние равновесия. Если правая часть отлична от нуля, то существует равновесное решение

$$\varphi = \frac{f(u)}{D},$$

причем $\dot{\varphi} = 0$ (когда вал вращается, положение равновесия смещено).

Мы хотим исследовать колебания вокруг нового положения равновесия. Положим для этого

$$\varphi_1 = \varphi - \frac{f(u)}{D}.$$

Для φ_1 мы получаем однородное уравнение:

$$I\ddot{\varphi}_1 + [\mu + f'(u)]\dot{\varphi}_1 + D\varphi_1 = 0. \tag{2}$$

Вместо колебания вокруг нулевого положения, которое было при $u=0$, теперь происходит колебание вокруг смещенного положения равновесия (рис. 40). Общее решение уравнения (2) таково:

$$\varphi=\frac{f(u)}{D}+Ae^{-\frac{1}{2}[\mu+f'(u)]t}\cos(\omega t+\psi).$$

Если $f'(u)>0$ или если $f'(u)<0$, но по абсолютной величине меньше, чем μ, то ничего нового нет, колебания затухают. Но возможно

$$\delta'=\frac{1}{2}[\mu+f'(u)]<0.$$

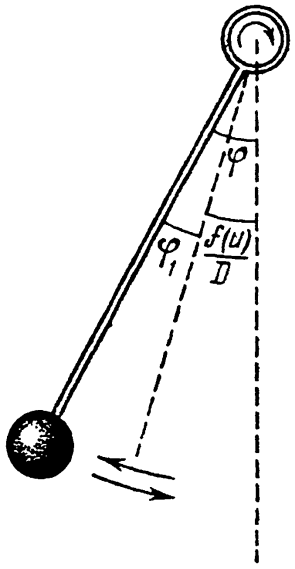


Рис. 40.

Тогда происходит *нарастание* колебаний. Этот случай несет в себе очень большие, существенные изменения по сравнению со случаем затухания колебаний. Физически нет возможности (принципиально!) ограничиться при наличии нарастания линейным уравнением. В случае же затухающих колебаний это возможно для большого круга задач.

Обратимся к другому примеру. Постараемся построить упрощенное дифференциальное уравнение катодного генератора. Но сначала повторим в двух словах некоторые общие сведения.

Изобретение катодной трубки[1] внесло переворот в радиотехнику. Действие катодной трубки основано на одном известном физическом явлении — эффекте Ричардсона. Металлический (вольфрамовый) катод нагрет примерно до 2500°. При этом с поверхности металла выходят электроны. Внутри металла всегда имеются свободные электроны, но выскочить при низкой температуре они не могут, так как есть препятствующее этому силовое поле. При нагревании металла скорости электронов увеличиваются, и некоторые из них могут выскочить. Электроны заряжены отрицательно, и при положительном напряжении на аноде все электроны, выделяемые металлом, летят на анод. Если напряжение на аноде отрицательно, то ток равен нулю (рис. 41). Но это слишком упрощенная картина. На самом деле ток меняется непрерывно (пунктирная

[1] [По современной терминологии — электронной лампы. Генератор также называется теперь не катодным, а ламповым.]

кривая на рис. 41). Это объясняется не принятым нами сначала во внимание взаимодействием электронов между собой. Явление это называется эффектом пространственного заряда.

Можно ввести третий электрод — сетку (рис. 42). Введение сетки — громадное достижение. На движение электронов сильнее всего влияет поле около катода (нити). Анод заряжен положительно. Сетка близка к катоду. Достаточно подать на сетку малый потенциал, чтобы около катода получилось сильное поле. Изменяя напряжение на сетке, мы сильно изменяем анодный ток.

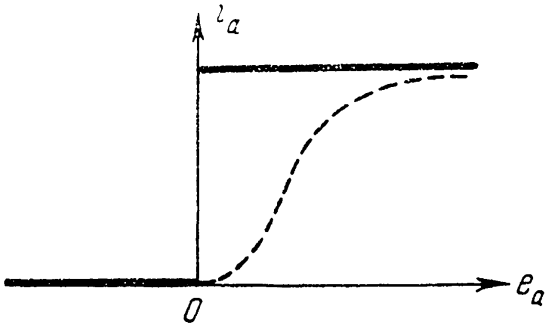


Рис. 41.

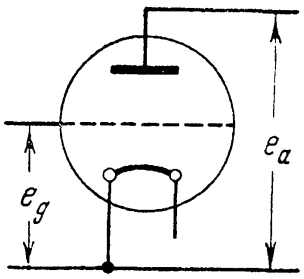


Рис. 42.

Сила тока зависит от напряжения на сетке и от напряжения на аноде. Эта зависимость имеет такой вид:

$$i_a = f(e_g + De_a),$$

где

$$D \ll 1.$$

Это значит, что действие анода на много слабее, чем действие сетки: анодом „перехватывается“ лишь часть силовых линий, исходящих от катода. Величину D иногда называют „прохват“ (по-немецки Durchgriff)[1].

Вот как, в общих чертах, действует катодная лампа. С ней можно сделать бесконечно много разных вещей. Нас сейчас интересует схема, показанная на рис. 43. Это одна из основных схем, которыми пользуется теперь беспроволочная телеграфия. Ее впервые построили с другой целью, но оказалось, что в ней самопроизвольно возникают незатухающие колебания. Подбирая L и C, можно получить колебания с различным собственным периодом.

---

[1] [В настоящее время для величины D общепринятым является термин „проницаемость“].

Нам нужно написать дифференциальное уравнение этой схемы. Опыт показывает, что в ней могут происходить колебания, и теория должна позволить нам овладеть этим явлением (вначале им владели плохо). Уравнение мы составим с помощью метода, подобного тому, который используется для цепей постоянного тока, — метода Кирхгофа.

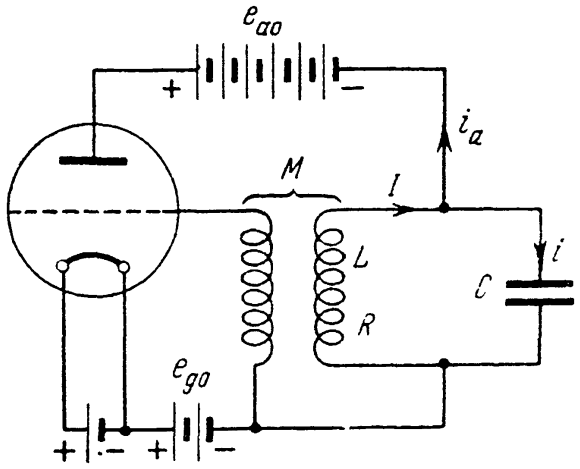


Рис. 43.

Обход по колебательному контуру дает уравнение

$$IR = -L\frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C}$$

При этом $i = \frac{dQ}{dt}$ (i — ток в ветви с конденсатором), но $i \neq I$, так как есть разветвление. Здесь

$$i = I - i_a,$$

и, следовательно,

$$\frac{dQ}{dt} = I - i_a. \tag{4}$$

Продифференцируем (3) и подставим в (4). Мы получаем:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{i_a}{C},$$

или

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 2\delta\frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 i_a, \tag{5}$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2\delta = \frac{R}{L}.$$

Из уравнения (5) еще ничего получить нельзя. Все дело в правой части. Что такое i_a? Существует определенная характеристика лампы (зависимость анодного тока от управляющего напряжения), которая должна быть задана на основе экспериментальных данных. Пусть батареи анода и сетки имеют электродвижущие силы e_{a0} и e_{g0}. Анодное напряжение складывается из электродвижущей силы батареи и электродвижущей силы $-L\frac{dI}{dt}$ в катушке колебательного контура. Магнитное поле тока в контуре

пронизывает сеточную катушку, и в ней наводится электродвижущая сила $-M\frac{dI}{dt}$. Таким образом,

$$i_a = f\left[e_{g0} - M\frac{dI}{dt} + D\left(e_{a0} - L\frac{dI}{dt}\right)\right]. \tag{6}$$

Коэффициент M может быть как положительным, так и отрицательным. Его знак очень существенен. Если обе катушки навиты одинаково (рис. 44, *а*), то M положительно; если одна навита налево, другая — направо (рис. 44, *б*), то M отрицательно.

Из (5) и (6) получаем:

$$\ddot{I} + 2\delta\dot{I} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 f[e_{g0} - M\dot{I} + D(e_{a0} - L\dot{I})]. \tag{7}$$

Мы решили первую задачу — установили дифференциальное уравнение.



Рис. 44.

Схема, которая была только что изложена, чрезвычайно упрощена.

1. Если рабочая точка лампы попадает в область $e_g > 0$, то электроны частью попадают на сетку. Мы не принимаем во внимание этот ток сетки. В настоящее время работают так, что сеточный ток очень мал. Но в технике иногда приходится с ним считаться.

2. Когда мы писали напряжение на аноде в виде $e_{a0} - L\dot{I}$, мы не приняли во внимание составляющую RI напряжения на контуре. Легко видеть, что чем меньше логарифмический декремент контура, тем меньше эта составляющая по сравнению с $-L\dot{I}$. Если предположить, что колебания близки к синусоидальной форме $A\cos\omega t$, то

$$RI \sim RA, \quad L\dot{I} \sim A\omega L,$$

и отношение этих величин будет порядка

$$\frac{R}{\omega L} = \frac{d}{\pi}.$$

Таким образом, когда R/L мало по сравнению с ω, т. е. логарифмический декремент контура мал, составляющей RI можно пренебречь. Если бы мы приняли ее во внимание, то это очень усложнило бы задачу. Но для линейного случая можно провести и такое, более полное, рассмотрение.

Уравнение (7) — опять нелинейное уравнение, но вблизи равновесия можно свести задачу к линейному уравнению с постоянными коэффициентами так же, как в задаче о маятнике Фроуда. Можно написать приближенно, для малых $\dot{I}$, разлагая функцию f в ряд и отбрасывая члены порядка выше первого:

$$\ddot{I} + 2\delta \dot{I} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 f(e_{g0} + De_{a0}) - \omega_0^2 f'(e_{g0} + De_{a0})(M + DL)\dot{I}.$$

Это линейное уравнение с постоянными коэффициентами и с постоянной правой частью.

Какие здесь возможны случаи? Если коэффициенты положительны, то нет ничего нового по сравнению с обычным затухающим контуром. Если коэффициент при первой производной от тока отрицателен, то будет нарастание колебаний. Где граница между обоими случаями?

Производная $f'(e_{g0} + De_{a0})$ от анодного тока — это крутизна характеристики S в данной рабочей точке (трубки в основном характеризуются двумя постоянными: S и D). При

$$2\delta + \omega_0^2 S(M + DL) > 0$$

имеет место затухание, но при

$$2\delta + \omega_0^2 S(M + DL) < 0 \tag{8}$$

будет нарастание колебаний. Таким образом, равенство

$$2\delta + \omega_0^2 S(M + DL) = 0$$

дает границу самовозбуждения генератора.

Когда имеет место (8), генератор сам раскачивается. Это неравенство можно написать немного иначе:

$$R + \frac{(M + DL)S}{C} < 0. \tag{9}$$

Отсюда следует одно интересное замечание. Так как

$$L > 0, \quad C > 0, \quad D > 0, \quad S > 0,$$

то для нарастания колебаний необходимо, чтобы было

$$M < 0,$$

т. е. нужно связать катушки вполне определенным образом (если одну катушку перевернуть, колебания пропадут). Чтобы величина $2\delta + \omega_0^2 S(M + DL)$ была отрицательна, нужно, кроме того, связать катушки достаточно сильно. Формула (9) — одна из основных формул радиотелеграфии.

Сделаем общее замечание. При $\delta < 0$ имеем:

$$x = \text{const} + Ae^{+|\delta|t}\cos(\omega t + \varphi). \tag{10}$$

Нарастающие колебания получаются, если $A \neq 0$. Имеется положение равновесия $x = \text{const}$, но равновесие — неустойчивое. Пусть вначале x равно const + сколь угодно малая величина. Это и значит, что A отлично от нуля. Дальнейший процесс описывается уравнением (10). Система все дальше и дальше отходит от положения равновесия. Смотря потому, будет ли $\delta < 0$ или $\delta > 0$, мы имеем дело с неустойчивым или с устойчивым положением равновесия.

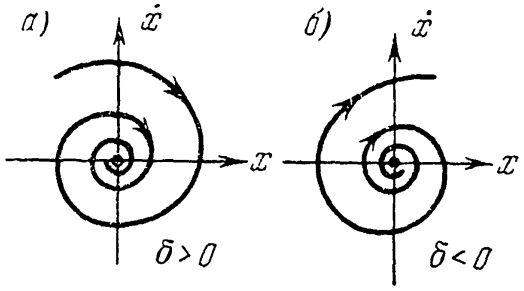


Рис. 45.

Уже при рассмотрении консервативной системы мы встречали устойчивые и неустойчивые состояния равновесия[1]. Они были связаны с определенными типами особых точек на фазовой плоскости. В случае центра равновесие устойчиво, в случае седла — неустойчиво. Применим здесь тот же подход — рассмотрим фазовую плоскость. Она будет теперь иметь совсем другой вид, чем в случае консервативной системы. Здесь нет континуума замкнутых интегральных кривых, а есть семейство спиралей. В консервативных системах в окрестности устойчивого равновесия колебания периодические. Здесь же колебания около устойчивого равновесия обязательно затухают, и система стремится возвратиться в равновесное состояние (рис. 45, *а*). Если имеет место неустойчивость, то система совершает нарастающие колебания и беспредельно удаляется от состояния равновесия (рис. 45, *б*). Оба эти случая, как вы видели, могут осуществиться на практике. Особые точки типа, изображенного на рис. 45, *а* и *б*, называются *фокусами* (устойчивым и неустойчивым). Движение по интегральным кривым происходит по часовой стрелке.

[1] [См. 9-ую лекцию.]

Всякое исследование предполагает идеализацию. Написав линейное уравнение, мы ограничились малыми колебаниями. При $\delta > 0$ уравнение, которое мы писали, полностью могло охватить проблему. Здесь в течение всего процесса от $t = 0$ и до $t = \infty$ у нас нет увеличения амплитуды. Если предпосылки малости выполнены вначале, то они еще лучше выполняются в дальнейшем. Линейное уравнение давало, таким образом, ответ на вопрос о том, каков *весь* процесс. В случае, когда $\delta < 0$, дело обстоит совсем иначе. Если даже задать такие начальные условия, при которых отклонение мало, то тем не менее наверняка наступит момент, когда наши предпосылки сделаются неправильными. Таким образом, в случае $\delta < 0$ линейное уравнение *принципиально* не может описывать процесс в его целостности, на неограниченном отрезке времени. При $\delta < 0$ процесс автоматически переходит в такую область, где необходимо исследование с помощью *нелинейного* уравнения. Абсурдно пользоваться линейным уравнением тогда, когда нарушена лежащая в его основе предпосылка; между тем процесс автоматически ведет к ее нарушению.

Речь шла о линейном однородном уравнении с *постоянными* коэффициентами. Как обстоит дело с другими линейными уравнениями, например с переменной правой частью? Могут ли они дать ответ на вопрос о том, что происходит в ламповом генераторе? Я утверждаю, что не могут.

Такие уравнения соответствуют системам, на которые действуют внешние силы, зависящие заданным образом от времени. Нас же здесь интересуют такие системы, которые *сами* определяют все элементы происходящего в них процесса. Дифференциальные уравнения таких систем не содержат времени явно. Такие системы называют *автономными*.

Если автономная система подчиняется *линейному* дифференциальному уравнению, то в общем случае оно имеет вид

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = c,$$

причем все a_i, а также c — постоянные (вообще говоря, коэффициенты a_i, линейного уравнения могут зависеть от t). Движения линейных автономных систем либо затухают, либо нарастают. Ни одно не ведет к установившемуся периодическому процессу. Говоря точнее, незатухающие колебания могут получиться в линейной системе только тогда, когда система консервативна. Но этот случай для

нас сейчас мало интересен. В консервативной системе нет обмена энергии, характерного для генератора: генератор излучает, энергия колебаний пополняется за счет энергии батареи.

Все линейные системы имеют следующие свойства. Если y_1 — решение, то Cy_1 (C — постоянная) тоже решение. Если y_1 и y_2 — решения, то $y_1 + y_2$ — тоже решение. В линейной системе периодические решения могут быть только в отсутствие обмена энергии того типа, о котором только что говорилось (система консервативна). При этом амплитуда зависит всецело от начальных условий. Она не определяется самой системой. В генераторе получаются незатухающие колебания, амплитуда которых, как мы увидим[1], не зависит от начальных условий.

Таким образом ясно, что овладеть процессами в генераторе с помощью линейных уравнений невозможно.

Очень долго хотели подойти к незатухающим колебаниям „линейно". Пришлось кардинально пересмотреть весь подход, отказаться от линейности. Правда, некоторые вопросы, относящиеся к генераторам, можно решить с помощью линейных уравнений. Я имею в виду вопросы устойчивости или неустойчивости равновесия. Но на чем остановится нарастание колебаний, какая установится амплитуда, — об этом на основе линейного уравнения сказать ничего нельзя. Для этого нужно перейти к нелинейным уравнениям, и здесь возникает необъятный круг вопросов. Я не могу говорить о них подробно, но я хотел бы все же их затронуть.

Чего можно ожидать в случае, если положение равновесия неустойчиво? Возможен уход изображающей точки в бесконечность. Возможен уход в другое устойчивое состояние равновесия. Наконец, — и это для нас физически самое интересное — возможно стремление к замкнутой кривой на фазовой плоскости, т. е. стремление к периодическому режиму. Каждому незатухающему колебательному процессу соответствует изолированная замкнутая кривая (рис. 46), к которой стремятся соседние кривые. Такая кривая чужда линейным уравнениям. Она называется *предельным циклом* Пуанкаре. На связь предельных циклов с незатухающими колебаниями указал А. А. Андронов. Начав с исследования нескольких простых случаев, он пришел к общему выводу о том, что математическим (геометрическим) образом незатухающих колебаний является предельный цикл.

---

[1] [См. 14-ую лекцию.]

Вопрос о фактическом нахождении предельных циклов оставим в стороне. Это — трудный вопрос. Но важно знать, что искать незатухающие колебания в неконсервативных системах — это на математическом языке значит искать предельные циклы.

Фундаментальное отличие от консервативных систем заключается здесь в том, что энергия системы сохраняется, несмотря на то, что система непрерывно затрачивает энергию. Откуда же берется энергия для восполнения потерь?

В маятнике Фроуда энергия поступает в систему вследствие вращения вала. В случае генератора источником энергии является анодная батарея. Излучаемая энергия в конечном итоге поставляется батареей.

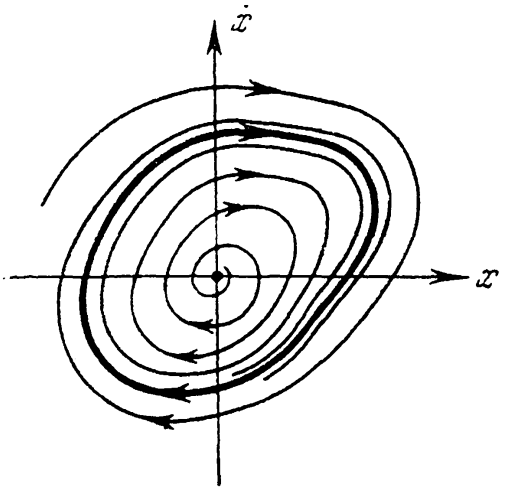


Рис. 46.

Займемся задачей об установлении колебаний в ламповом генераторе. Задача нелинейная, и для того, чтобы можно было решить



Рис. 47.

ее до конца, мы очень сильно ее упростим, допустим сильную идеализацию.

Для иллюстрации метода начнем с нелинейной задачи о затухающих колебаниях. Возьмем случай постоянного трения (это хорошо известный пример).

Пусть на горизонтальном столе лежит масса, привязанная к двум пружинам (рис. 47). Здесь очень неплоха следующая идеализация: сила трения по абсолютной величине постоянна и равна λmg. Сила трения положительна или отрицательна, смотря по тому, движется ли масса влево или вправо (так называемое *сухое* трение).

Задача математически ставится так:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + kx &= -\lambda mg \quad \text{при } \dot{x} > 0; \\ m\ddot{x} + kx &= +\lambda mg \quad \text{при } \dot{x} < 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, нужно решить *два* уравнения, причем одно

сменяет другое, когда меняется знак $\dot{x}$. В этом заключается нелинейность задачи.

Найдем решение первого уравнения. В силу этого решения скорость $\dot{x}$ в некоторый момент обращается в нуль. Дальше скорость будет отрицательной. Нужно перейти в этот момент ко второму уравнению и взять для него в качестве начальных условий те условия, которые получились в конце движения, описанного первым уравнением. Таким образом, мы упрощаем задачу: вместо чрезвычайно трудной задачи, задаваемой нелинейным уравнением, решаем две задачи, задаваемые линейными уравнениями. Потом мы припасовываем их, т. е. составляем решение нелинейной задачи из отдельных кусков решений линейных задач.

Аналогичным образом можно рассмотреть задачу о колебании стрелки, опирающейся на иголку; здесь также имеет место сухое трение.

Решения уравнений (11) изображают незатухающие синусоидальные колебания вокруг сменяющихся положений равновесия (рис. 48). При этом предполагается, что начальное отклонение превосходит по абсолютной величине $\lambda mg/k$ (в противном случае упругая сила уравновешивается силой трения покоя и тело остается в равновесии). В результате чередования кусков синусоидальных колебаний около двух положений равновесия движение затухает, причем легко видеть, как уменьшаются последовательные амплитуды. Если в начале амплитуда равна x_0, то последующие амплитуды будут

$$x_0 - 2\lambda \frac{mg}{k}, \quad x_0 - 4\lambda \frac{mg}{k}, \ldots$$

Наступит момент, когда масса попадет в полосу

$$|x| < \lambda \frac{mg}{k},$$

и на этом движение прекратится. В противоположность линейному случаю, где покой наступает через бесконечное время, здесь он наступает через конечное время.

Вы видите, как просто и изящно здесь удается справиться с нелинейностью.

Представим себе другой случай. Пусть „трение“ направлено по движению, причем величина трения попрежнему постоянна. Решая задачу таким же способом, мы увидим, что амплитуда будет неограниченно расти. Пусть теперь, наряду с этим „тре-

нием“, есть вязкое трение, пропорциональное скорости и направленное против движения. Метод остается в силе, и задачу можно решить очень легко.

Случай, о котором идет речь, осуществляется в ламповом генераторе при соответствующей идеализации характеристики.

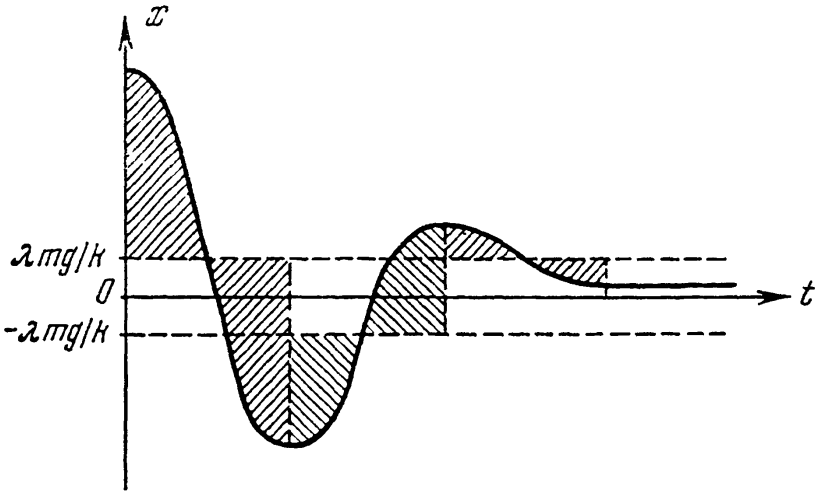


Рис. 48.

Если характеристика (рис. 49) очень крутая и если размах напряжения на сетке достаточно велик, то бóльшая часть пути изображающей точки приходится на горизонтальные части характеристики. Можно поэтому идеализировать характеристику так, как показано жирными прямыми на рис. 49. Получается задача, аналогичная той, которую мы только что решали: два сменяющиеся линейные уравнения с постоянными правыми частями.

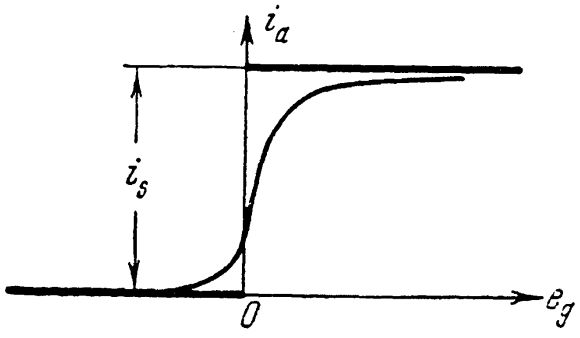


Рис. 49.

Мы рассмотрим в следующей лекции такой упрощенный ламповый генератор. Окажется, что в нем возможен периодический процесс, и мы найдем его амплитуду. Это не та амплитуда, которая действительно устанавливается, но для ответа на ряд принципиальных вопросов этого упрощенного рассмотрения достаточно.

ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(15/XII 1930 г.)

Идеализированный ламповый генератор. Периодическое движение. Его устойчивость. Процесс установления колебаний. Предел применимости идеализации. Изменение мощности генератора при параллельном включении нескольких ламп. Коэффициент полезного действия генератора. Линейная система с одной степенью свободы; случай, когда движения апериодичны. Действие внешней периодической силы на линейную систему с одной степенью свободы; предварительное понятие о резонансе.

В маятнике Фроуда и в ламповом генераторе происходит возрастание колебаний, положение равновесия неустойчиво. Линейное уравнение не может дать ответа, каков будет установившийся режим. Мы вступили, таким образом, в область нелинейных колебаний и нелинейных уравнений.

Процесс, происходящий в ламповом генераторе, нельзя охватить одним линейным дифференциальным уравнением, но, как уже было сказано, его можно описать в некоторых случаях с помощью двух различных линейных уравнений. При этом приходится работать с разрывными функциями. Этот прием идеализации приводит в некоторых случаях к хорошим, проверенным на опыте результатам.

Остановимся на практически исключительно важной задаче о том, каковы установившиеся колебания в ламповом генераторе. Для того, чтобы решить эту задачу, характеристику лампы мы принимаем разрывной. Мы идеализируем задачу так: когда сеточное напряжение отрицательно, анодный ток равен нулю; когда сеточное напряжение положительно, анодный ток равен току насыщения. Такая идеализация возможна в том случае, когда размахи сеточного напряжения очень велики по сравнению с интервалом сеточного напряжения, в котором происходит заметное нарастание анодного тока. Когда этот интервал пробегается очень быстро, такая идеализация качественно правильна и позволяет уяснить себе механизм явлений, хотя количественно она недостаточна.

В рассматриваемом ламповом генераторе (рис. 43)

$$e_g - e_{g0} = -M\frac{dI}{dt}.$$

Мы уже видели, что равновесие может быть неустойчиво при $M<0$, т. е. если напряжение на сетке положительно тогда, когда

ток I в колебательном контуре нарастает. При сделанной идеализации характеристики (рис. 49) анодный ток:

$$i_a = i_s > 0 \text{ при } \frac{dI}{dt} > 0;$$

$$i_a = 0 \quad \text{при } \frac{dI}{dt} < 0.$$

Мы получаем следующие два дифференциальные уравнения:

$$\ddot{I} + 2\delta\dot{I} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 i_s \text{ при } \dot{I} > 0; \tag{1}$$

$$\ddot{I} + 2\delta\dot{I} + \omega_0^2 I = 0 \quad \text{при } \dot{I} < 0. \tag{2}$$

Как связать их решения? Начнем с такого состояния, при котором $\dot{I} > 0$. При этом нужно пользоваться уравнением (1). В какой-то момент $\dot{I}$ обращается в нуль и меняет знак и нужно перейти к уравнению (2). Ни ток, ни напряжение не могут иметь скачков. Поэтому в момент, когда мы переходим к уравнению (2), мы должны взять за начальные такие значения I и $\dot{I}$, которые получаются в этот момент из уравнения (1). При максимальном (по абсолютной величине) отрицательном значении I производная $\dot{I}$ опять проходит через нуль и становится положительной. Нужно опять прибегнуть к уравнению (1), соблюдая условие непрерывности I и $\dot{I}$, и т. д.

Оба уравнения дают затухающие колебания „периода“

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}},$$

но возле различных положений равновесия: уравнение (2) — около нуля, уравнение (1) — около $I = i_s$ (рис. 50). Если в начальный момент $I = I_0 > 0$, $\dot{I} = 0$ (максимум тока), то через полколебания (через время $\tau/2$) мы будем иметь ток

$$I' = -I_0 e^{-\delta\tau/2},$$

а после полного колебания (еще через время $\tau/2$) ток будет равен

$$I_1 = I_0 e^{-\delta\tau} + i_s(1 + e^{-\delta\tau/2}). \tag{3}$$

Периодическое повторение, т. е. незатухающее колебание, получится при условии, что

$$I_1 = I_0. \tag{4}$$

Если это возможно, то система уравнений (1) и (2) допускает периодическое решение. Требуя, чтобы наряду с (3) выполнялось условие (4), мы получаем

$$I_0 = I_0 e^{-\delta\tau} + i_s(1 + e^{-\delta\tau/2}),$$

откуда

$$I_0 = i_s \frac{1 + e^{-\delta\tau/2}}{1 - e^{-\delta\tau}}. \qquad (5)$$

Такова амплитуда установившегося колебания. Она определяется параметрами системы и не зависит от начальных условий. Такая установившаяся амплитуда — нечто существенно новое по отношению к линейным системам.

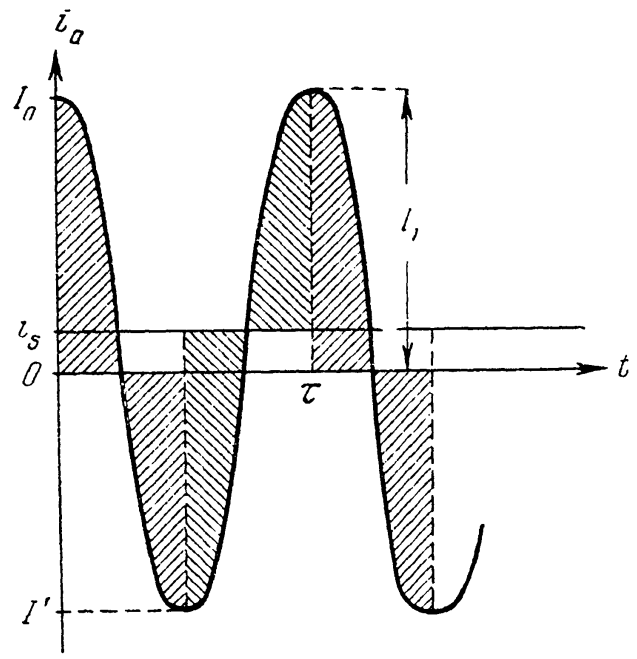


Рис. 50.

Если $\delta\tau$ мало по сравнению с единицей, то приближенно

$$I_0 = \frac{2i_s}{\delta\tau}. \qquad (6)$$

При этом I_0 очень велико по отношению к току насыщения i_s. Каждое колебание состоит из двух половин „затухающих синусоид". Чтобы количественно охарактеризовать отличие колебания от синусоидального, нужно разложить процесс в ряд Фурье. При $\delta\tau \ll 1$ колебания очень близки к синусоидальным.

С помощью уравнений (1) и (2) легко разрешить следующие вопросы:

1. Устойчиво ли найденное периодическое решение? Может случиться, что существует периодическое решение, но оно не соответствует реальному периодическому процессу. Нужно ввести новое понятие — понятие *устойчивого* периодического движения. Вопрос заключается в следующем: если слегка изменить начальные условия, то останется ли движение вблизи периодического или уйдет от него? Реальным периодическим процессам соответствуют только устойчивые периодические движения.

2. Устанавливается ли найденное периодическое колебание? (Мы доказали *возможность* периодического режима, но мы не доказали, что этот режим действительно устанавливается при любых начальных условиях).

Построим график I_1 как функции I_0, т. е. график уравнения (3). Это будет прямая линия AB (рис. 51). Ее точка пересечения с прямой $I_1 = I_0$ соответствует найденному периодическому решению. Если мы начнем с произвольного начального значения I'_0, меньшего, чем амплитуда периодического решения, то мы найдем значения амплитуды через период, через два периода и т. д. построением, показанным на рис. 51. Если в начале амплитуда больше значения, соответствующего периодическому решению (например, I''_0 на рис. 51), происходит аналогичный процесс с обратной стороны. Мы видим, что при любойначальной амплитуде точка, изображающая колебание генератора стремится к точке пересечения, показанной на рис. 51. Таким образом, мы приходим к выводу, что периодическое решение не только существует, но является *устойчивым* периодическим решением.

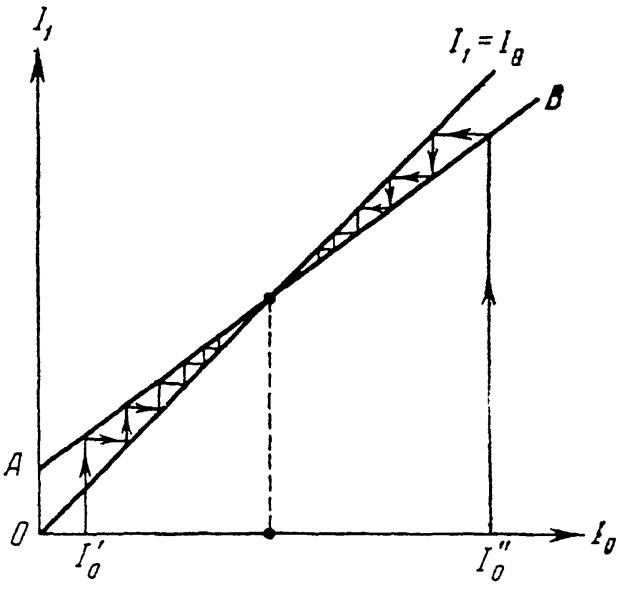


Рис. 51.

Откуда бы ни начался процесс в рассматриваемой схеме, при сделанной идеализации он обязательно придет к периодическому решению (5). На практике бывают случаи, когда периодические колебания существуют, но они устойчивы только „в малом“, только по отношению к достаточно малым изменениям начальных условий. С этим связаны известные явления „срыва“ в ламповом генераторе. Устойчивость „в малом“ и „в большом“ (т. е. по отношению к любому изменению начальных условий) — разные вещи. Положение равновесия может быть устойчиво „в большом“ (рис. 52, *а*) или только „в малом“ (рис. 52, *б*). Такие же случаи возможны и для периодических решений.

При сделанной идеализации лампового генератора получилась чрезвычайно простая математическая теория. Те же, в сущности,

рассуждения можно провести на фазовой плоскости (I, $\dot{I}$) и получить на ней замкнутую кривую — предельный цикл, — изображающую периодическое решение. На нее навиваются другие интегральные кривые. Это соответствует тому подходу, о котором уже говорилось[1]. Такой подход здесь не сложнее и, быть может, нагляднее. Если усложнить идеализацию, исследование на фазовой плоскости становится, повидимому, необходимым.

Сравним рассмотренный идеальный случай с реальной схемой; сравним наши выводы с результатами опытов.

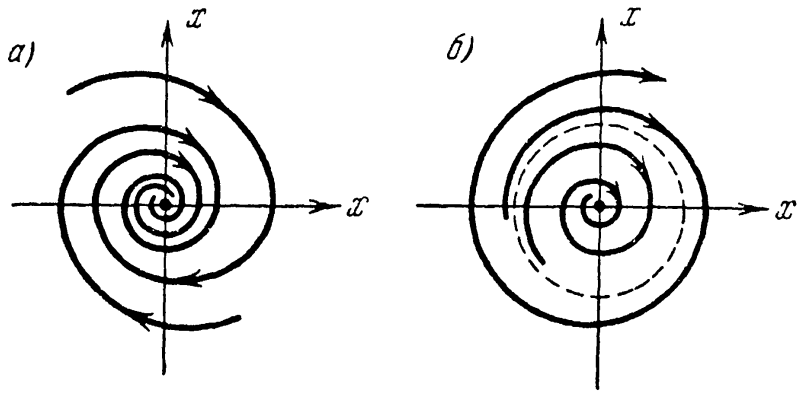


Рис. 52.

Поставим несколько вопросов, относящихся к зависимости установившихся колебаний от параметров. Вопросы эти сами напрашиваются.

Формулу (6) можно переписать в таком виде:

$$I_0 = \frac{2i_s}{d}, \tag{7}$$

где d — логарифмический декремент контура:

$$d = \delta\tau = \frac{R}{2L} \cdot 2\pi \sqrt{LC} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}. \tag{8}$$

Будем уменьшать беспредельно сопротивление контура R. Тогда согласно (7) и (8) нет предела увеличению амплитуды колебаний I_0. Но в действительности такой предел существует (это видно хотя бы из того, что при беспредельном росте I_0 беспредельно растет мощность $RI_0^2/2$, поглощаемая в контуре).

Никакую идеализацию нельзя продолжать „до бесчувствия". Нужно идеализировать со смыслом, помнить об ограничениях.

---

[1] [См. 9-ую лекцию.]

Очень распространена склонность верить в формулу „до конца", в то время как всегда нужно уяснить себе, до каких пределов та или иная формула справедлива.

Мы молчаливо предположили, что напряжение на аноде

$$e_a = e_{a0} - L\dot{I}$$

все время положительно.

Здесь $L\dot{I}$ — напряжение на индуктивности. Если колебания почти синусообразны, оно имеет амплитуду, равную $\omega L I_0$. Если $\delta \to 0$, эта амплитуда возрастает, и напряжение на аноде перестает быть все время положительным. Оно остается все время положительным в лучшем случае при

$$e_{a0} - \omega L I_0 = 0. \tag{9}$$

Рассмотрим этот оптимальный случай. Из (7), (8) и (9) получаем:

$$R = \frac{2Li_s}{\pi C e_{v0}}. \tag{10}$$

Отсюда видно, что R нельзя делать бесконечно малым. Если взять R меньше значения (10), то в некоторые моменты анодного тока не будет, если даже напряжение на сетке положительно, и тогда наша теория не годится.

Очень легко изменить схему так, чтобы при R, меньшем, чем (10), опять войти в нужную область:

$$e_{a0} - \omega L I_0 > 0.$$

Это можно сделать путем перераспределения индуктивности контура (рис. 53, *а*) или добавления индуктивности в анодную цепь (рис. 53, *б*).

Поставим теперь вопрос: как „вытянуть" из схемы возможно больше энергии? Сюда же относится такой вопрос. Представьте себе, что вы не меняете схему, но включаете в нее две тождественные лампы параллельно (рис. 54). Ясно, что при прочих равных условиях анодный ток i_a удваивается. Тогда колебательный ток тоже удваивается, а энергия увеличивается в 4 раза. Возьмите три лампы, — энергия увеличится в 9 раз и т. д. Но ведь мощность, отдаваемая батареей, растет пропорционально анодному току, т. е. числу ламп. Получается парадокс.

Его разрешение состоит в следующем. Если вначале лампа использована полностью, т. е. так что выполняется условие (9),

то для двух ламп теория уже не годится, так как $e_{a0} - \omega L \cdot 2I_0$ будет отрицательно. Для того, чтобы она оставалась справедливой, нужно увеличить R вдвое. Но если при включении второй лампы вы увеличите R вдвое, то энергия увеличится только вдвое. Итак, если лампа была использована полностью, то при добавлении второй лампы нужно изменить схему. Удвоением числа ламп действительно можно учетверить энергию, но только в том случае, если до этого лампы не были полностью использованы.

Интересен коэффициент полезного действия лампового генератора. В среднем за период батарея отдает мощность

$$W = \frac{e_{a0} i_s}{2},$$

а контур потребляет мощность

$$W_0 = \frac{I_0^2 R}{2}$$

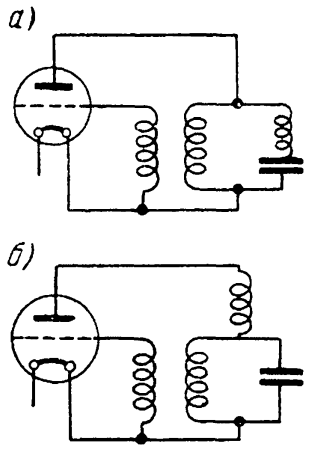


Рис. 53.

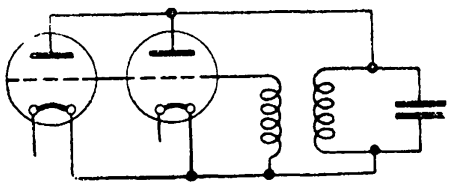


Рис. 54.

(полезная мощность). Под коэффициентом полезного действия здесь надо понимать

$$\eta = \frac{W_0}{W}.$$

При наибольшем токе, совместимом с условием применимости нашей теории, т. е. при выполнении условия (9), имеем:

$$\eta = \frac{2}{\pi} \approx 64\%.$$

Это — совершенно недостаточный коэффициент полезного действия. Для того, чтобы его увеличить, нужно изменить режим работы лампы. В этом направлении нет предела, нет принципиальных трудностей. Можно достигнуть без затруднений коэффициента полезного действия 97—98%.

Почему у нас амплитуда I_0 не зависит от M? Из-за взятой нами исключительной характеристики. Мы приняли, что значение

анодного тока определяется исключительно *знаком* напряжения на сетке. Конечно, в случае реальной характеристики амплитуда тока зависит от величины коэффициента взаимной индукции.

На этом мы закончим рассмотрение систем, совершающих незатухающие колебания.

Вернемся к линейному уравнению

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Решая его подстановкой

$$x = e^{mt},$$

мы получаем для m *характеристическое уравнение*

$$m^2 + 2\delta m + \omega_0^2 = 0$$

с корнями

$$m_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Может случиться, что $\omega_0 < \delta$. Тогда оба корня действительны. Они оба положительны, если $\delta < 0$, и оба отрицательны, если $\delta > 0$. Пусть имеет место последний случай. Обозначим:

$$m_1 = -\lambda_1, \qquad m_2 = -\lambda_2.$$

Тогда

$$x = Ae^{-\lambda_1 t} + Be^{-\lambda_2 t}, \tag{11}$$

где $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Движение является *апериодическим* (неколебательным).

A и B — произвольные постоянные. Значения $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$ можно задать как угодно. При этом

$$x_0 = A + B,$$

$$\dot{x}_0 = -\lambda_1 A - \lambda_2 B.$$

Пусть начальные условия таковы, что A и B имеют один и тот же знак. Тогда x не обращается в нуль ни при каком конечном t. В самом деле, $x = 0$ только если

$$-\frac{A}{B} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t};$$

но это равенство не может выполняться, так как левая часть отрицательна, а правая — положительна. Таким образом, x асимптотически стремится к нулю, монотонно убывая.

Если A и B имеют различные знаки, x может один раз обратиться в нуль при конечном t.

Рассмотрим последний случай, когда

$$\delta = \omega_0, \quad \lambda_1 = \lambda_2.$$

При этом решение (11) принимает вид

$$x = Ae^{-\lambda t}. \tag{12}$$

Если мы захотим приспособить такое решение к начальным условиям, то нам нехватит одной постоянной интегрирования. Не трудно, однако, показать, что в этом специальном случае, наряду с решением вида (12), имеется решение вида $te^{-\lambda t}$ и общее решение таково:

$$x = Ae^{-\lambda t} + Bte^{-\lambda t}.$$

В нем опять имеются *две* независимые константы, и его можно приспособить к любым начальным условиям.

Случай, когда λ_1 и λ_2 почти равны друг другу, и случай, когда они в точности равны, физически близки друг другу. Замечу, что этот случай важен в теории измерительных приборов. Часто требуется, чтобы измерительный прибор как можно быстрее приходил в положение равновесия. Оказывается, это требование выполняется как раз тогда, когда характеристическое уравнение имеет равные корни.

При $\delta < 0$ имеем:

$$x = Ae^{m_1 t} + Be^{m_2 t},$$

т. е. x представляет собой апериодически возрастающую величину. Если система выведена из положения равновесия, то со временем x растет беспредельно. Здесь — опять неустойчивое положение равновесия (а значит, опять линейное дифференциальное уравнение не может полностью описать процесс). Соответствующая ему особая точка называется *неустойчивым узлом* (рис. 55, *а*). Может быть и устойчивый узел ($m_{1,2} < 0$, рис. 55, *б*).

Перейдем к поведению колебательных систем под действием внешних сил. Этот вопрос — один из основных в теории колебаний. Мы ограничимся линейными системами.

Мы рассматривали маятник, груз на пружине, балку, контур с емкостью и индуктивностью. Как ведут себя такие системы под действием сил, заданных как функция времени? Основное, заме-

чательное явление, которое при этом наблюдается, — это явление *резонанса*.

Мост можно рассматривать в первом приближении, как систему с одной степенью свободы. Ритмическая (периодическая) сила возникает, например, тогда, когда по нему в ногу идут войска.

Всякий кабель в первом приближении — цепь с емкостью и индуктивностью. Периодическая сила возникает тогда, когда кабель питается от машины переменного тока.

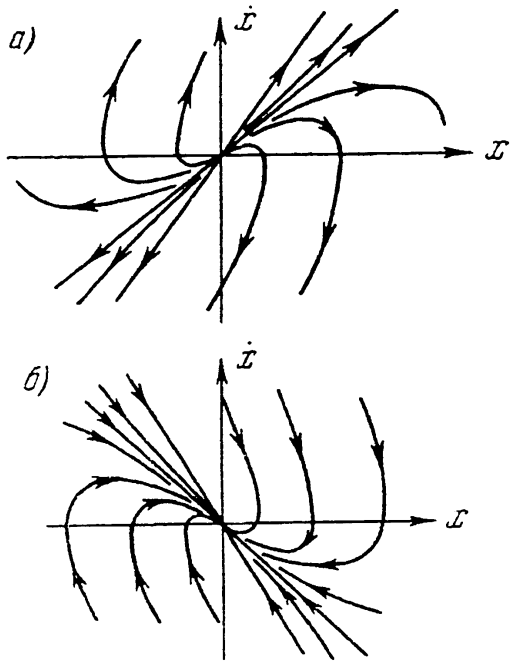


Рис. 55.

Во всех этих случаях, пока частота внешней силы p значительно меньше собственной частоты системы ω_0, колебания слабые. Пусть амплитуда внешней силы остается постоянной, но меняется ее частота. Когда p становится близка к ω_0, начинается сильная раскачка. Мы называем это явление резонансом. Если p значительно превышает ω_0, опять все успокаивается.

Пусть некоторая периодическая сила дает амплитуду смещения, скажем, 1 мм. При неизменности амплитуды внешней силы изменение ее частоты на 30% может увеличить амплитуду смещения, скажем, до 1 м. Генератор электродвижущей силы в 1000 вольт может создать в кабеле напряжение в 10 000—20 000 вольт. При резонансе колебания могут иметь другой *порядок* величины, чем в отсутствие резонанса.

Резонанс может быть весьма опасным. Случалось, что вследствие резонанса разрывались валы пароходов. В радиотехнике резонанс играет положительную роль. Он применяется для того, чтобы приемник сильно реагировал на определенную частоту, и дает колоссальное увеличение чувствительности для данной частоты.

Резонанс играет большую роль и в оптике, в явлениях дисперсии и абсорбции. Тот факт, что ртутный пар для некоторых (немногих) частот непрозрачен, а для всех остальных прозрачен, объясняется резонансом.

Известно большое значение резонанса в акустике. Благодаря резонансу опытное ухо различает, что аккорд состоит из таких-то нот.

Явление резонанса связано со *всей формой воздействия*, оно охватывает длительный промежуток времени. Нельзя говорить: резонанс наступил в такой-то момент. Здесь существенное значение имеет понятие *процесса*, а не понятие состояния в данный момент.

Уравнение

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0 \tag{13}$$

имеет такой смысл: масса, умноженная на ускорение, равна сумме упругой силы и силы трения. Теперь к ним прибавляется внешняя сила — заданная функция времени:

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = f(t). \tag{14}$$

Укажем некоторые свойства этого неоднородного уравнения (уравнения с правой частью).

В случае однородного уравнения (13), если x_1 и x_2 являются решениями, то

$$x = Ax_1 + Bx_2$$

тоже есть решение. Для уравнения с правой частью это уже несправедливо. Но пусть далее

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \ldots + f_n(t) \tag{15}$$

и пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — решения уравнения (14), соответствующие каждому из слагаемых в правой части (15). Тогда уравнение (14) имеет решение

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Так как очень широкий класс функций можно представить в виде суммы гармонических колебаний, мы приходим к выводу, что для многих задач достаточно уметь решить уравнение (14) для случая, когда справа стоит один синусоидальный член. Мы ограничимся этим случаем. Фазу правой части возьмем равной нулю (так как начало отсчета времени можно выбрать произвольно).

Пусть x_0 — общее решение однородного уравнения (13). Если x_1 — какое-то частное решение неоднородного уравнения (14), то

$$x = x_0 + x_1$$

есть общее решение неоднородного уравнения. Но $x_1 + \frac{x_0}{2}$ также является частным решением (14), а значит, и

$$x = x_1 + \frac{x_0}{2} + x_0$$

также есть общее решение неоднородного уравнения. Из этого видно, что разделение общего решения неоднородного уравнения на общее решение однородного и частное решение неоднородного неоднозначно. Почему приходится останавливаться на этом? Принято говорить: колебание, определяемое уравнением (14), есть сумма вынужденного и собственного колебаний. Это предполагает, что существует однозначное разбиение на вынужденное и собственное колебание. Но, как было только что сказано, разделение решения неоднозначно. Как вяжется одно с другим? Тут недостает одного уточнения. Когда мы имеем вынужденное колебание, мы ищем *периодическое* частное решение неоднородного уравнения. Такое решение — единственное, и, следовательно, разбиение общего решения неоднородного уравнения на *периодическое* решение и общее решение однородного уравнения однозначно.

ПЯТНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(18/XII 1930 г.)

Действие внешней синусоидальной силы на линейную систему с одной степенью свободы. Установившиеся колебания. Энергетические соотношения. Резонанс для заряда (смещения) и для тока (скорости). Резонансные кривые. Измерение декремента. Фазовые соотношения. Измерение декремента с помощью электродинамометра.

Вынужденные колебания гармонического осциллатора описываются линейным дифференциальным уравнением второго порядка с переменной правой частью. Нас интересует случай, когда правая часть синусоидальна, т. е. дифференциальное уравнение приводится к виду

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = E\cos pt, \tag{1}$$

где в механическом случае x — смещение и

$$E = \frac{E'}{m} \tag{1a}$$

(E' — амплитуда внешней силы, m — масса), а в электрическом случае x — заряд конденсатора и

$$E=\frac{E'}{L} \tag{1б}$$

(E' — амплитуда внешней э. д. с., L — индуктивность). Внешняя э. д. с. может быть непосредственно включена в контур, а может создаваться посредством индукции (рис. 56, *а* и *б*).

Часто для решения уравнения (1) пользуются комплексными выражениями. Правую часть заменяют выражением Ee^{ipt}, и получается *новое* уравнение

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2 x=Ee^{ipt}. \tag{2}$$

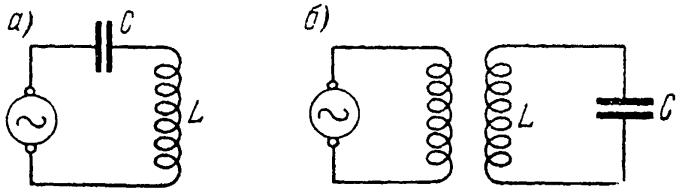


Рис. 56.

Действительная часть решения уравнения (2) является решением уравнения (1).

Уравнение (2) решается подстановкой

$$x=Ce^{ipt}. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2), получаем:

$$(-p^2+2\delta ip+\omega_0^2)\,Ce^{ipt}=Ee^{ipt},$$

откуда

$$C=\frac{E}{\omega_0^2-p^2+2\delta ip}. \tag{4}$$

Нас интересует действительная часть (3). Пользуясь методом, изложенным в начале курса [1], мы находим, что эта действительная часть имеет вид

$$x=X\cos(pt-\varphi), \tag{5}$$

причем

$$X^2=CC^*,\quad \operatorname{tg}\varphi=-\frac{\operatorname{Im}C}{\operatorname{Re}C}. \tag{6}$$

---

[1] [См. 3-ю лекцию.]

Подставляя в (6) выражение (4), получаем:

$$X = \frac{E}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}}; \tag{7}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\delta p}{\omega_0^2 - p^2}. \tag{8}$$

Если $\omega_0^2 - p^2 > 0$, то наименьшее положительное значение φ, определяемое уравнением (8), находится в первом квадранте. Если $\omega_0^2 - p^2 < 0$, оно находится во втором квадранте.

Мы нашли одно из частных решений неоднородного уравнения. Общее решение мы получим, прибавив к нему общее решение однородного уравнения:

$$x = X\cos(pt - \varphi) + Ae^{-\delta t}\cos(\omega t - \psi), \tag{9}$$

где

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2.$$

Здесь A и ψ — произвольные постоянные. Для того, чтобы удовлетворить любым начальным условиям $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, при $t = 0$, нужны как раз две произвольные постоянные.

Как уже было сказано в прошлой лекции, деление общего решения неоднородного уравнения на две части — решение неоднородного уравнения и общее решение однородного — неоднозначно. Но в данном случае можно однозначно разделить общее решение неоднородного уравнения на такие две части: *периодическое* решение неоднородного уравнения + общее решение однородного.

Если ждать достаточно долгое время, то собственные колебания делаются как угодно близки к нулю. Через достаточно долгое время, каковы бы ни были начальные условия, остается чисто периодическое колебание. Поэтому оно представляет самостоятельный физический интерес.

Все свойства, о которых мы будем говорить, относятся к этому *установившемуся* процессу. Они полностью сказываются лишь через достаточно долгое время. Поэтому, например, говорить о резонансе в первые мгновения после включения внешней силы бессмысленно.

Вынужденное периодическое колебание имеет частоту p, равную частоте действующей силы и, вообще говоря, отличную от ω. Частота, с которой колеблется осциллатор в установившемся

режиме при вынужденных колебаниях, совершенно не зависит от его собственной частоты.

Заметим теперь, что если смещение или заряд меняется по закону (5), то скорость (или ток) будет

$$\dot{x} = -pX\sin(pt-\varphi). \tag{10}$$

При собственных (незатухающих) колебаниях сумма кинетической и потенциальной энергий остается постоянной. Остается ли эта сумма постоянной также и при синусоидальных вынужденных колебаниях? Подставим в выражение полной энергии

$$W = \frac{kx^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

выражения (5) и (10), полученные для x и $\dot{x}$. Это дает

$$W = \frac{k}{2}X^2\cos^2(pt-\varphi) + \frac{m}{2}p^2X^2\sin^2(pt-\varphi).$$

Отсюда видно, что полная энергия непостоянна. Все время идет переход энергии из источника в рассматриваемую систему и обратно. Полная энергия постоянна только при

$$k = mp^2.$$

Мы приходим обратным путем к уже известному результату: без внешней силы осциллатор колеблется с частотой, равной $\sqrt{k/m}$. Мы видим далее, что, несмотря на синусоидальность колебания, не имеет места равенство средней кинетической и средней потенциальной энергии. Если $p^2 > \omega_0^2$, то $\overline{T} > \overline{U}$; если $p^2 < \omega_0^2$, то $\overline{T} < \overline{U}$. Равенство средних потенциальной и кинетической энергий играет важную роль для собственных колебаний. Но то, к чему мы привыкли для собственных колебаний, нельзя переносить на вынужденные.

При прочих равных условиях амплитуда вынужденных колебаний X пропорциональна амплитуде действующей силы E. Амплитуда и фаза сильно зависят от того, в каком отношении находится период внешней силы к периоду собственных колебаний.

Будем исследовать, при каком соотношении частоты внешней силы и собственной частоты наступает резонанс (понимая под резонансом максимум амплитуды вынужденных колебаний). Здесь возникают различные задачи, ведущие к различным резонансам.

1. Пусть $\omega_0 = \text{const}$, изменяется p. Продифференцировав X по p, легко найти, что максимум амплитуды смещения или заряда X будет при

$$p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}.$$

Таким образом, „резонансная" частота внешней силы не равна собственной частоте ω_0 и не равна „частоте" затухающего осциллаторного процесса $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Резонанс наступает не при изохронизме, а при p, несколько меньшем, чем ω_0.

2. Пусть попрежнему $\omega_0 = \text{const}$, изменяется p; но теперь мы будем интересоваться максимумом амплитуды тока или скорости $\dot{X}$. Нужно, следовательно, искать максимум выражения

$$\dot{X} \equiv pX = \frac{pE}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}} = \frac{E}{\sqrt{4\delta^2 + \left(\frac{\omega_0^2 - p^2}{p}\right)^2}}. \tag{11}$$

Ясно, что максимум будет при

$$\omega_0^2 - p^2 = 0,$$

т. е. здесь резонанс наступает тогда, когда период внешней силы *равен* периоду незатухающего колебания.

Для максимальных значений амплитуды заряда и тока имеем:

$$X_{\max} = \frac{E}{2\delta\omega_0}, \quad \dot{X}_{\max} = \frac{E}{2\delta}. \tag{12}$$

Итак, резонанс в смысле максимума амплитуды тока и резонанс в смысле максимума амплитуды заряда возникают при *различных* значениях p. Насколько велика разница между ними? X максимально при

$$p^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2,$$

а $\dot{X}$ максимально при

$$p^2 = \omega_0^2.$$

Напишем для первого случая:

$$p^2 = \omega_0^2\left(1 - 2\frac{\delta^2}{\omega_0^2}\right),$$

или, поскольку

$$\frac{\delta}{\omega_0} = \frac{d}{2\pi},$$

где d — логарифмический декремент,

$$p^2 = \omega_0^2\left(1 - 2\frac{d^2}{4\pi^2}\right).$$

Пусть $d = 1/100$. Тогда $d/2\pi = 1/600$, а $(1/600)^2$ — очень малая величина. При очень тонких опытах можно констатировать отличие между обоими значениями p. Но почти всегда им можно пренебречь и считать, что оба резонанса наступают, когда $p = \omega$ (здесь можно не различать ω_0 и $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$).

3. Когда наступает максимум X, если меняется ω_0? Это случай, который имеет место в практике беспроволочной телеграфии, когда настраивают приемник, меняя емкость конденсатора. Как легко видеть, здесь максимум опять наступает при $\omega_0 = p$.

Можно сказать, что если затухание мало, резонанс наступает при изохронизме. Этого приближения часто достаточно.

Мы выяснили, *когда* наступает максимум. Но насколько он резкий? Насколько остра кривая резонанса? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, воспользуемся другим написанием формул (7) и (11), — тем написанием, которым пользовался Релей. Из формулы (8) легко получить для $\sin\varphi$ выражение

$$\sin\varphi = \frac{2\delta p}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}}. \tag{13}$$

На основании (13) можно написать для X и $\dot{X}$ очень простые выражения:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{E\sin\varphi}{2\delta p}; \\ \dot{X} &= \frac{E\sin\varphi}{2\delta}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Допустим, что нас интересует зависимость от расстройки максимального значения кинетической энергии, т. е. величины

$$T = \frac{m}{2}\dot{X}^2. \tag{15}$$

Мы знаем, что $T = T_{max}$ при $\omega_0 = p$, т. е. при $\sin\varphi = 1$. Поэтому на основании (14), (15) и (8) получаем:

$$\frac{T_{max} - T}{T} = \operatorname{ctg}^2\varphi = \left(\frac{\omega_0^2 - p^2}{2\delta p}\right)^2, \tag{16}$$

откуда

$$\frac{T}{T_{\max}} = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_0^2 - p^2}{2\delta p}\right)^2}.$$

Разделим числитель и знаменатель в скобке на $\omega_0 p$ и введем „степень изохронизма“

$$\frac{p}{\omega_0} = q. \tag{17}$$

Мы получим:

$$\frac{T}{T_{\max}} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{q} - q\right)^2 \Big/ \left(\frac{d}{\pi}\right)^2}. \tag{18}$$

Это — очень удобное и сравнительно простое выражение. Из него видно, что отношение $T/T_{\max}$ зависит не от трех отдельных переменных p, ω_0 и δ, а от двух их комбинаций (q и d). В этом заключается одна из причин того, почему так существенен логарифмический декремент.

Возьмем, например, $d/\pi = 0{,}01$, $q = 0{,}8$. Тогда

$$\frac{T}{T_{\max}} = \frac{1}{1+2\cdot 10^3}.$$

Из этого примера ясно, почему резонанс имеет такое огромное значение. Здесь достаточно расстройки на 20%, чтобы энергия упала в 2000 раз.

Энергия при резонансе может быть и в миллионы раз больше, чем вдали от резонанса. Этого удалось достигнуть сравнительно недавно с помощью пьезокварца. Амплитуды колебаний кварцевой пластинки в „нормальных“ условиях порядка всего лишь 10^{-6} мм, но при резонансе кварцевые пластинки иной раз разлетаются.

Резонансная кривая, изображающая формулу (18), дает возможность экспериментально определить логарифмический декремент.

Вернемся к формуле (16). При малых расстройках, т. е. когда ω_0 мало отличается от p, приближенно

$$(\omega_0 + p)(\omega_0 - p) = 2p(\omega_0 - p),$$

и формула (16) дает:

$$\frac{T_{\max} - T}{T} = \frac{(\omega_0 - p)^2}{\delta^2} = \frac{\left(\frac{\omega_0 - p}{\omega_0}\right)^2}{\left(\frac{d}{2\pi}\right)^2}.$$

Энергия падает вдвое по сравнению с резонансом при

$$\frac{\omega_0 - p}{\omega_0} = \frac{d}{2\pi}. \tag{19}$$

Определив расстройку, при которой ордината резонансной кривой равна половине ординаты в максимуме, можно вычислить по формуле (19) логарифмический декремент.

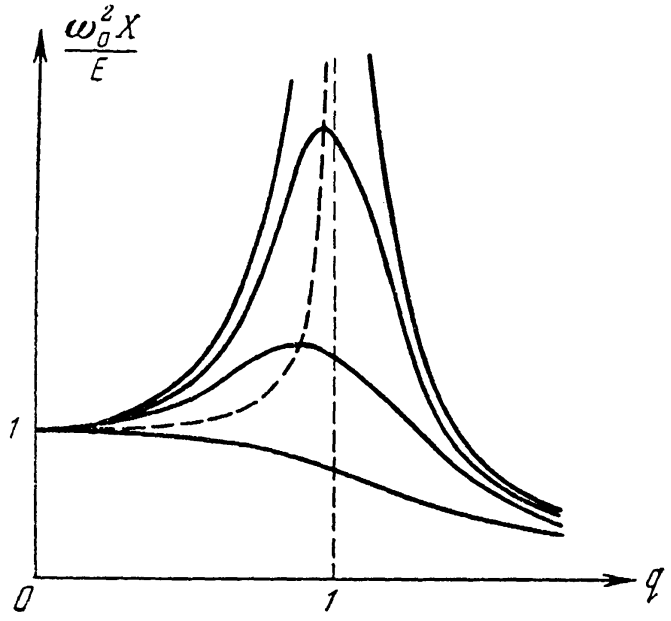


Рис. 57.

Остротой настройки называется обратная величина относительной расстройки $|\omega_0/\Delta\omega|$, которая нужна для того, чтобы ордината резонансной кривой уменьшилась вдвое. Из формулы для $(T_{max} - T)/T$ следует, что

$$\left|\frac{\omega_0}{\Delta\omega}\right| = \frac{2\pi}{d},$$

т. е. острота настройки обратно пропорциональна логарифмическому декременту контура.

При резонансе на основании (12) и (1б) амплитуда тока

$$I = \dot{X} = \frac{E}{2\delta} = \frac{E'}{R}.$$

Индуктивность и емкость друг друга компенсируют, и получается такое же соотношение между током и электродвижущей силой, как в случае постоянного тока. Фаза тока совпадает при этом с фазой электродвижущей силы так же, как если бы мы имели чисто омическое сопротивление.

Приведем несколько резонансных кривых для амплитуды смещения $(\omega_0^2 X/E)$ в зависимости от q, соответствующих различным значениям декремента (рис. 57). Из них видно, как максимум смещается в зависимости от декремента.

Как изменяется сдвиг фаз между внешней силой, с одной стороны, и током или зарядом в контуре — с другой, в зависимости от расстройки?

Формулу (8) также не трудно записать через параметры $d=2\pi\delta/\omega_0$ и $q=p/\omega_0$:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{qd}{\pi(1-q^2)}.$$

Если частота внешней силы очень мала, то практически $\operatorname{tg}\varphi=0$, т. е. смещение изменяется в фазе с внешней силой. Если $p\to\infty$, то $\operatorname{tg}\varphi$ тоже стремится к нулю, но будучи отрицательным. Следовательно, сдвиг фаз стремится к π: в тот момент, когда внешняя сила действует вправо, смещение направлено влево. При резонансе ($q=1$) сдвиг фаз равен $\pi/2$. Чем меньше d, тем меньше нужно удалиться от резонанса, чтобы сдвиг фаз стал практически равен 0 или π (рис. 58).

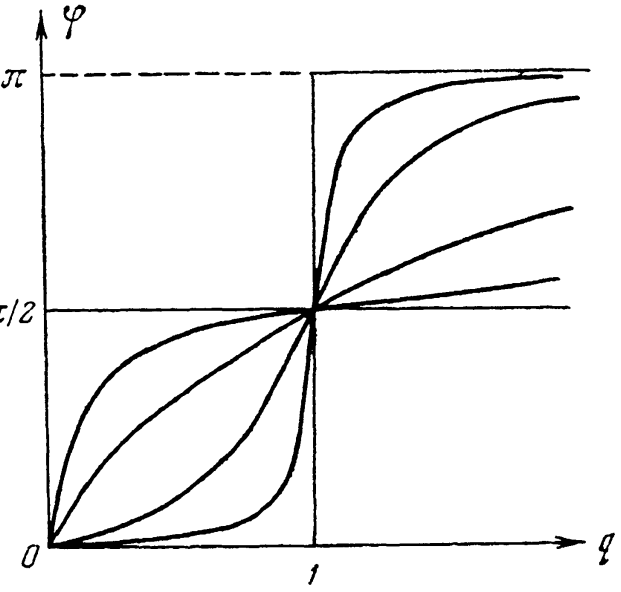


Рис. 58.

То обстоятельство, что между внешней силой и смещением должен существовать сдвиг фаз, а также какой именно он должен быть, можно вывести из простых энергетических соображений.

Рассмотрим установившийся режим. Умножим уравнение

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{Q}{C}=E'\cos pt$$

на i и усредним за полный период. Это дает:

$$R\overline{i^2}=E'\overline{\cos pt\cdot i}. \qquad (20)$$

Справа стоит средняя мощность, отдаваемая внешним источником, слева — средняя потребляемая мощность. Будем приближаться к резонансу (оставляя E' постоянным); i растет по амплитуде, но $\overline{i^2}$ растет гораздо быстрее. Отсюда ясно, что соотношение (20) не могло бы оставаться правильным, если бы между внешней э. д. с. и током (а следовательно, и зарядом) не было меняющейся с настройкой разности фаз.

Можно простым образом вывести из энергетического соотношения (20) зависимость амплитуды тока от φ. Подставим в (20)

$$i = \dot{x} = -\dot{X}\sin(pt-\varphi).$$

Получаем:

$$R\dot{X}^2\overline{\sin^2(pt-\varphi)} = -E'\dot{X}\overline{\cos pt\cdot\sin(pt-\varphi)}.$$

Но

$$\overline{\sin^2(pt-\varphi)} = \frac{1}{2}, \quad \overline{\cos pt\cdot\sin(pt-\varphi)} = -\frac{\sin\varphi}{2}.$$

Следовательно,

$$R\dot{X}^2 = \dot{X}E'\sin\varphi,$$

откуда мы снова приходим к формуле (14):

$$\dot{X} = \frac{E'}{R}\sin\varphi.$$

Как мы теперь видим, это релеевское написание формулы для амплитуды имеет довольно глубокий физический смысл. Связь между амплитудой тока и фазой диктуется энергетическими требованиями. Раздельное рассмотрение амплитуды и фазы не выявляет той связи между их изменениями, которая обусловлена энергетическими соотношениями. Есть ряд физических явлений, где эта связь существенна.

Рассмотрим электродинамометр. В нем действует между катушками, в которых текут переменные токи i_1 и i_2, пара сил с моментом

$$M \sim i_1 i_2. \tag{21}$$

Пусть ток i_1 берется прямо от источника переменной э. д. с. (через омическое сопротивление), а ток i_2 течет в резонансном контуре (рис. 59). В этом случае

$$i_1 = \alpha E\sin pt, \quad i_2 = \dot{X}\sin(pt-\varphi) \tag{22}$$

(α — постоянная). На основании (14), (21) и (22)

$$M = \text{const}\cdot\sin\varphi\cdot\overline{\sin pt\sin(pt-\varphi)}.$$

Но

$$\overline{\sin pt\cdot\sin(pt-\varphi)} = \frac{\cos\varphi}{2},$$

и, следовательно,

$$M = \text{const} \cdot \sin\varphi \cos\varphi = \text{const} \cdot \sin 2\varphi.$$

Соответствующую этой формуле зависимость момента от настройки изображает особая резонансная кривая (рис. 60). При настройке контура в резонанс

$$\sin\varphi = 1, \quad \cos\varphi = 0,$$

т. е. в случае резонанса момент сил отсутствует.

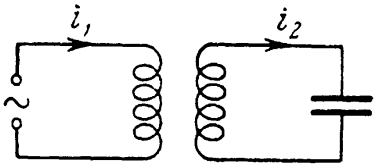


Рис. 59.

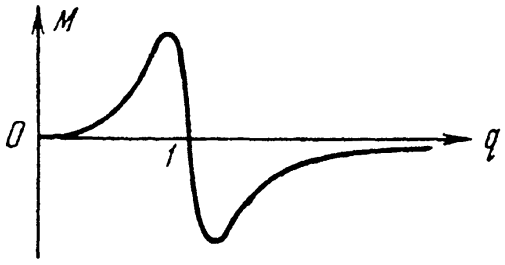


Рис. 60.

Максимум и минимум M соответствуют $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, т. е. $\operatorname{tg}\varphi = \pm 1$, или

$$\frac{2\delta p}{\omega_0^2 - p^2} = \pm 1.$$

Это — то самое соотношение (19):

$$\left|\frac{\omega_0 - p}{\omega_0}\right| = \frac{d}{2\pi},$$

которое мы получили раньше для случая, когда энергия в контуре падает вдвое по сравнению с резонансом.

Таким образом, из резонансной кривой для M (найдя максимум и минимум) также можно определить декремент. Кроме того, получается *нулевой* метод нахождения резонанса, позволяющий устанавливать настройку в резонанс с очень большой точностью.

Мы рассмотрели простой электрический пример — электродинамометр, но аналогичные вещи встречаются в гидродинамике: например, взаимодействие двух пульсирующих шаров, исследованное Бьеркнесом и послужившее моделью, с помощью которой старались объяснить многие явления.

На примере электродинамометра хорошо видна роль разности фаз при взаимодействии между колебательными системами.

Рассмотренные явления важны при взаимодействии между резонаторами. Этим вопросам значительное внимание уделил П. Н. Лебедев[1].

Другой случай, где основную роль играют фазовые соотношения между внешней силой и возбуждаемым колебанием, встречается в оптике, в теории дисперсии и поглощения[2].

ШЕСТНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(25/XII 1930 г.)

Резонанс в технике. Резонанс в оптике; фазовые соотношения. Неустановившийся режим; нарастание колебаний в затухающем осцилляторе. Резонанс в незатухающем осцилляторе. Мнимое опровержение теории относительности. Сила, состоящая из ряда синусоидальных составляющих. Физическое значение разложения Фурье. Противоречие между требованиями селективности и правильного воспроизведения модуляции. Ошибочная точка зрения Флеминга в вопросе о реальности боковых полос.

Повторим кратко свойства резонанса, в случае когда действует синусоидальная сила. При установившемся режиме происходит незатухающее синусоидальное колебание с периодом действующей силы. Амплитуда смещения максимальна, когда период действующей силы приблизительно совпадает с собственным периодом. Максимум выражен тем резче (резонансная кривая тем острее), чем меньше логарифмический декремент. Если частота внешней силы p гораздо меньше собственной частоты ω_0, то смещение и сила почти синфазны. При резонансе (при $p = \omega_0$) сдвиг фаз между смещением и внешней силой равен 90°, т. е. сила максимальна при прохождении через положение равновесия. Если $p \gg \omega_0$, то смещение и сила имеют противоположные фазы.

Здесь самое главное — это резкий максимум амплитуды при синхронизме. Бывали случаи, когда цепные мосты разрушались, когда по ним шла в ногу колонна солдат. (Отчасти из-за подоб-

---

[1] [П. Н. Лебедев. Экспериментальное исследование пондеромоторного действия волн на резонаторы. Избр. соч. под ред. А. К. Тимирязева, М., 1949.]

[2] [См. 16-ую лекцию.]

ных явлений отошли от построения нежестких мостов.) Возможен также резонанс пароходного корпуса, резонанс фундамента, на котором установлена машина. Главный способ устранения этих явлений — изменение периода. Но есть и другие способы, о которых будет идти речь впоследствии[1].

Явление резонанса имеет место и в случае действия пондеромоторных сил между двумя осциллаторами. Таковы, например, притяжение и отталкивание (в зависимости от разности фаз) пульсирующих шаров, находящихся в жидкости.

Перейдем к оптике. Основные явления при прохождении света через тела, в сущности, связаны с резонансом.

Лет двадцать тому назад дело представляли себе очень просто. Вещество отличается от вакуума тем, что в нем содержатся резонаторы определенного собственного периода. Когда на среду падает световая волна определенной частоты, она возбуждает резонаторы с этой частотой. Действие прозрачной среды состоит в следующем: на падающую волну налагаются вторичные волны, излучаемые резонаторами, возбужденными падающей волной. Это приводит к изменению поля.

Все оптические свойства среды выводятся из этой картины. Если рассчитать измененное поле, то получается как раз то, что мы знаем из феноменологической оптики. Например, преломление тождественно сдвигу фазы измененной волны по отношению к падающей. Эта модель объясняет также действие на свет пластинок различной толщины.

При резонансе резонаторы сильно раскачиваются. Этим объясняется поглощение (абсорбция). С помощью простых представлений удалось дать достаточно полную картину дисперсии и абсорбции. Натриевый пар поглощает только определенную длину волны, а именно ту, которую он сам испускает. Для более длинных волн показатель преломления больше единицы, для более коротких — меньше единицы (это были в свое время замечательные открытия). Последнее объясняется тем, что если частота света ниже резонансной, измененная волна отстает по фазе от падающей; если же частота света выше резонансной, то получается наоборот — опережение по фазе.

Теперь физика отошла от этой модели: все факты говорят о том, что такая простая модель неверна. Однако полученные

---

[1] [Применение успокоителей, см. 26-ую и 27-ую лекции.]

с ее помощью соотношения в большой мере сохраняются и в новой теории. Поэтому практически оптика часто продолжает работать с этой моделью. Многие заключения сохраняются в полной силе.

Нам остается рассмотреть в связи с резонансом некоторые принципиальные вопросы и некоторые задачи и вопросы, возникающие при практических *положительных* применениях (в начале лекции говорилось об *отрицательных* сторонах резонанса). В радиотелеграфии, в радиотелефонии резонанс — инструмент, которым пользуются.

Мы рассматривали до сих пор установившийся режим. Рассмотрим теперь такую задачу. Пусть на резонатор в момент $t=0$ *начинает* действовать сила. Тогда нужно решить уравнение с правой частью

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2 x=E\sin pt \tag{1}$$

при определенных начальных условиях (мы писали раньше в правой части $E\cos pt$, а теперь пишем $E\sin pt$, но этим мы просто переставляем начало отсчета времени). Нужно найти такое решение x, для которого

$$x=0,\quad \dot{x}=0 \quad \text{при } t=0.$$

Это решение определенно однозначно.

Математика указывает, как найти такое решение. Нужно взять *общее* решение уравнения (1)

$$x=X\sin(pt-\varphi)+Ae^{-\delta t}\cos\omega t+Be^{-\delta t}\sin\omega t \tag{2}$$

и подогнать в нем произвольные постоянные под начальные условия. Положим в (2) $t=0$, $x=0$. Это дает уравнение

$$-X\sin\varphi+A=0. \tag{3}$$

Далее, продифференцируем (2) и положим $t=0$, $\dot{x}=0$. Это дает еще одно уравнение. Из двух полученных таким образом линейных алгебраических уравнений мы определим A и B.

Проделаем это для частного случая.

С самого начала предположим, что декремент мал и имеет место резонанс, т. е. $p=\omega_0\approx\omega$ (с точностью до δ^2). Тогда φ равно 90° и

$$X=\frac{E}{2\delta\omega_0}.$$

Уравнение (3) дает при этом $A=X$, а из условия $\dot{x}(0)=0$ мы получаем в этом случае, что B — малая величина порядка δ/p. В первом приближении, если пренебречь δ/p по сравнению с единицей, т. е. положить $B=0$, находим:

$$x=-\frac{E}{2\delta\omega_0}(1-e^{-\delta t})\cos\omega_0 t. \tag{4}$$

В начале, несмотря на совпадение частот p и ω_0, колебание x очень мало. Оно увеличивается — происходит нарастание амплитуды — по мере уменьшения $e^{-\delta t}$.

Получается такая картина. При очень малых декрементах амплитуда колоссальна, но ее установление длится очень долго. Явление резонанса характерно для *установившегося* режима. Чем более резко выражен резонанс, тем медленнее происходит установление. Можно это выразить так: резко выраженный резонанс долго не наступает.

Если силу выключить, колебания затухают. Затухание колебаний тем медленнее, чем меньше δ. При малом δ сила медленно раскачивает систему и колебания долго длятся после того, как прекратилось действие силы. Во избежание ошибок, нужно это постоянно иметь в виду. Укажем одну из распространенных ошибок.

Для целей беспроволочной телеграфии требуется изменять нечто в колебаниях передатчика, с тем чтобы амплитуда в приемнике изменялась как можно сильнее. Обычно изменяют амплитуду колебаний в передатчике. Было сделано предложение — изменять *частоту* передатчика. При малом затухании резонансная кривая очень крута, и поэтому, говорили, достаточно ничтожного изменения частоты, чтобы сильно изменить амплитуду.

Критика этого предложения заключается в следующем. Если изменение частоты происходит очень медленно, то утверждение справедливо. Но если оно не происходит очень медленно, то утверждение совсем несправедливо. Приемник не попадает в точку A (рис. 61) сразу. Он придет в нее тем медленнее, чем острее резонансная кривая. Условия передачи таковы, что быстрота изменения задается — ею нельзя распоряжаться. При быстрых же изменениях острота эффекта иллюзорна и цель не достигается.

Поставим теперь задачу о колебаниях *незатухающего* контура под действием внешней силы. Этот случай проще. Рассмотрение незатухающего контура для ряда вопросов имеет смысл.

Пусть $\delta \to 0$. Тогда в пределе формула (7) предыдущей лекции дает:

$$X = \frac{E}{\omega_0^2 - p^2}. \tag{5}$$

Если $|\omega_0^2 - p^2|$ велико по отношению к δ^2, т. е. далеко от резонанса, формула (5) приводит к удовлетворительным результатам. Пусть теперь $\omega_0 = p$. Тогда по формуле (5) $X = \infty$: если при приближении к резонансу не учитывать затухания, амплитуда растет неограниченно. Отсюда видно, что достаточно близко от резонанса мы обязаны при рассмотрении установившегося колебания принимать во внимание затухание, как бы оно ни было мало. Но как мы видели, чем меньше δ, тем медленнее устанавливается колебание. Когда δ стремится к нулю, $X \to \infty$, но стационарный режим устанавливается через бесконечное время, т. е. не устанавливается никогда. Поэтому формула (5) не приводит к физическому противоречию.

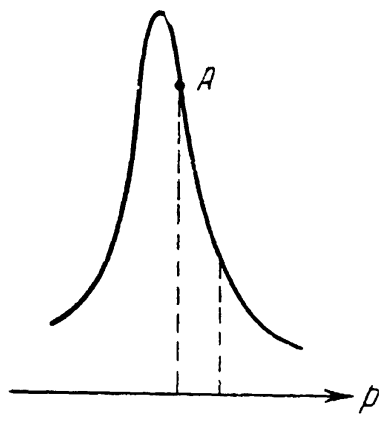


Рис. 61.

Из формулы (2) мы не получим при $\omega_0 = p$ установившегося (периодического) решения. Его нельзя получить и из периодического решения, полагая в нем $p = \omega_0$. Но *какое-то* решение должно существовать и в этом случае. Его можно найти другим путем.

Общее решение уравнения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = E \sin \omega_0 t$$

есть

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t - \frac{E}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t. \tag{6}$$

Последний член (он является частным решением неоднородного уравнения) неограниченно растет со временем. Происходит неограниченное накопление энергии. Решение

$$x = -\frac{t}{2\omega_0} \cos \omega_0 t \tag{7}$$

можно получить и из формулы (4) путем перехода к пределу $\delta = 0$. Как уже подчеркивалось, нельзя думать, что резонанс

наступает сразу. Если сила действует очень короткое время, то она не может вызвать большого нарастания колебаний, даже если нет трения.

Рассмотрим один относящийся сюда оптический парадокс. Исследование установившегося режима приводит к выводу, что показатель преломления n больше или меньше единицы, смотря по тому, что больше — частота падающего света или собственная частота молекулярных резонаторов. Показатель преломления равен отношению скорости света в вакууме к скорости света в теле. Пусть показатель преломления меньше единицы. Тогда скорость света в теле больше, чем скорость света в вакууме c. Опыт показывает, что действительно в некоторых случаях $n<1$. Кое-кто думал вывести отсюда возражение против теории относительности, так как одно из ее основных утверждений состоит в том, что ни один сигнал не может распространяться скорее, чем свет в пустоте.

В действительности никакого противоречия нет. Теория относительности запрещает распространение *сигнала* со скоростью, большей c. Показатель преломления относится к *установившимся* колебаниям. Когда распространяется начало сигнала, электроны не успели еще придти в колебание. Сигнал вначале распространяется так, как будто бы молекул нет. Сигнал равносилен неустановившемуся режиму, и из того, что $n<1$, еще нельзя ничего заключить о скорости распространения сигнала.

Поставим теперь несколько более общую задачу. Нас часто интересуют периодические или почти-периодические силы $f(t)$. Их можно представить в виде суммы синусоид с различными периодами (математика нас учит, как это следует делать). Если мы это сделаем, то получим уравнение вида

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2 x=\sum_i E_i\cos(p_i t+\psi_i). \tag{8}$$

Мы знаем, что, найдя решение для случая, когда в правой части стоит один член суммы, мы сможем написать решение (8) как сумму отдельных таких решений.

Возьмем специальный случай. Пусть самая малая (по абсолютной величине) разность между частотами p_i есть

$$p_1-p_2=\Delta p.$$

Пусть логарифмический декремент резонатора чрезвычайно мал по сравнению с $|\Delta p|/p_i$. Настроим резонатор на p_1. Тогда

все члены с частотами, отличными от p_1, будут малы по сравнению с членом частоты p_1.

Если резонатор с достаточно малым затуханием настроен на частоту одной из синусообразных слагаемых силы, то остальные слагаемые практически совершенно незаметны. Такой резонатор выделяет определенный синусообразный член внешней силы, а именно тот, на который он настроен. Резонатор, это — реактив на *синусообразные* колебания. Он откликается именно на синусообразные колебания, а *не вообще* на периодические. Если действует периодическая сила периода, равного собственному периоду резонатора, но в которой „случайно" нет синуса (или косинуса) нужной частоты, — резонанса не будет.

Например, как будет вести себя резонатор, настроенный на частоту p, в случае силы

$$f_1(t) = a_2 \sin 2pt + a_3 \sin 3pt$$

($p = \omega_0$) и в случае силы

$$f_2(t) = a_1 \sin pt$$

(обе силы имеют одинаковый период)? Во втором случае он откликнется сильно; в первом случае он откликнется очень слабо. Для резонанса важен не период действующей силы, а наличие в разложении правой части на сумму синусов (или косинусов) члена с синусом (или косинусом) определенной частоты.

Вообразите, что вы раскачиваете маятник. Вы даете ему толчок. Он немного отклоняется и возвращается обратно. Если вы будете снова его толкать в „нужные" моменты (через период), то действие толчков будет накопляться, — будет резонанс. Если вы будете толкать маятник через каждые два периода, то тоже будет резонанс, — маятник будет опять сильно раскачиваться.

Этот результат противоречит представлению о том, что для резонанса необходимо совпадение периода внешней силы с собственным периодом. Но он находится в согласии с тем, что было только что сказано.

Если разложить кривую (рис. 62) в ряд синусов, то при периоде толчков, равном удвоенному собственному периоду, этот ряд содержит синус собственного периода. Благодаря этому наступает резонанс.

Неправильно думать, что условием резонанса является совпадение периодов. Единственный критерий резонанса дает разложе-

ние на синусоиды. Этим и объясняется та важная роль, которую играет в физике ряд Фурье.

Любую функцию, в частности периодическую, можно представить как сумму других функций и притом самым разнообразным образом. Возможно разложение не только по синусам и косинусам, но и по другим функциям. Какое разложение правильно? С точки зрения математики все грамотные разложения правильны и поставленный нами вопрос не имеет содержания. Он аналогичен вопросу: что правильно, $a^2 - b^2$ или $(a-b)(a+b)$? Оба выражения представляют собой одно и то же.

Вся соль здесь — в *физике*, в том, как исследуется процесс, на что рассматриваемое колебание действует. Если методом исследования является резонанс, то можно выделить каждый отдельный член ряда Фурье. Поэтому единственно правильное или, лучше сказать, целесообразное представление при исследовании процесса с помощью резонанса — это ряд Фурье. Здесь разложение на другие функции не ведет к цели. То или иное разложение правильно, разумно, в зависимости от системы, на которую колебание действует, в частности в зависимости от физического прибора, с которым работают.



Рис. 62.

В беспроволочной телеграфии и телефонии резонанс — важный инструмент, фундаментально используемый. Необходимо знать, какого рода вопросы при этом возникают.

Мы хотим передавать сигналы. Если передатчик работает синусообразно, то он может дать знать лишь о том, что он работает. Для передачи *сообщения* передатчик должен *изменять* амплитуду своих колебаний определенным образом, — сообразно тому, что должно быть передано. В этом состоит *модуляция*. Синусоиду модулируют, например, тем, что поют перед микрофоном. При этом амплитуда колебаний передатчика уменьшается или увеличивается сообразно колебаниям давления воздуха. Пусть акустическая частота есть ν. Тогда (приближенно) амплитуда колебаний передатчика меняется по закону

$$E = E_0(1 + k\cos \nu t)$$

и сигнал имеет вид

$$y = E\cos pt = E_0(1 + k\cos \nu t)\cos pt. \qquad (9)$$

Это — самый простой случай модуляции передатчика.

Передатчик действует на приемник, на линейный осциллатор. Формула (9) показывает, какова при этом внешняя сила, действующая на контур приемника. Какие свойства этого контура существенны при действии такой силы?

Приемная станция настроена на данный передатчик. Вместе с тем имеется большое число других передатчиков. Требуется настроить приемник так, чтобы они ему не мешали, чтобы он мог от них „отстроиться". Желательно, чтобы одновременно могло работать возможно большее число передающих станций.

Итак, к приемнику предъявляются следующие требования:

1. Он должен правильно передавать модуляцию данного передатчика.

2. Он не должен откликаться на другие передатчики (селективность).

3. Кроме того, имеются помехи, форма и сила которых от нас не зависят (атмосферные разряды, грозы). Желательно построить приемник так, чтобы он был нечувствителен к помехам.

К сожалению, первое требование и остальные два противоречивы, так что приходится идти на компромисс.

Наиболее простой модуляции соответствует формула (9). Ее можно записать и в таком виде:

$$y = E_0 \cos pt + \frac{kE_0}{2} \cos (p - \nu) t + \frac{kE_0}{2} \cos (p + \nu) t. \qquad (10)$$

Получились три синусообразные колебания. Следовательно, на приемное устройство действуют три колебания с тремя частотами p, $p - \nu$, $p + \nu$. Частота p называется несущей частотой, частоты $p - \nu$ и $p + \nu$ называются боковыми полосами. Амплитуды вынужденных колебаний, соответствующих трем синусоидальным составляющим силы (10), таковы:

$$\frac{E_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}}, \qquad \frac{\frac{kE_0}{2}}{\sqrt{[\omega_0 - (p \pm \nu)^2]^2 + 4(p \pm \nu)^2 \delta^2}},$$

или, если $p = \omega_0$ (приемник настроен на несущую частоту передатчика),

$$\frac{E_0}{2\delta\omega_0}, \qquad \frac{\frac{kE_0}{2}}{\sqrt{(\nu^2 \mp 2\omega_0\nu)^2 + 4(\omega_0 \pm \nu)^2\delta^2}} \approx \frac{kE_0}{4\delta\omega_0 \sqrt{1 + \frac{\nu^2 4\pi^2}{\omega_0^2 d^2}}}.$$

Предположим, что затухание контура приемника очень мало:

$$\frac{\nu^2}{\omega_0^2} \gg \frac{d^2}{4\pi^2}.$$

Тогда боковые полосы практически не попадают в приемник. Он реагирует так, как будто бы модуляции нет, т. е. приемник не чувствует, модулирован сигнал или нет, он не слышит того, что говорит передатчик. Таким образом, нельзя брать декремент очень малым.

Мы получим в приемнике хорошую модуляцию, если резонанс не изменит заметно отношение амплитуд синусоидальных составляющих (несущей и боковых). Для хорошего воспроизведения модуляции должно быть поэтому

$$\frac{\nu^2}{\omega_0^2} \ll \frac{d^2}{4\pi^2}, \tag{11}$$

относительная величина частоты модуляции должна быть гораздо меньше, чем $d/2\pi$. Если требуется, чтобы правильно передавалась модуляция, мы не имеем права брать очень малый декремент.

При $p/2\pi = 10^6$ (длина волны 300 м), $\nu/2\pi = 3000$, т. е. при $\nu/p = 0{,}003$, условие (11) дает:

$$d \gg 0{,}003 \cdot 2\pi,$$

или

$$d \gg 0{,}019.$$

Даже для умеренно хорошего воспроизведения модуляции здесь необходим сравнительно большой логарифмический декремент. Но это противоречит требованию высокой селективности. Кроме того, чем больше логарифмический декремент, тем сильнее сказываются помехи[1].

Какие есть способы улучшить положение? Что нам задано и что мы можем менять? Частота модуляции ν — это частота речи. Ее менять мы не можем. Значит, если ν задано, то для достижения хорошего воспроизведения модуляции нужно увеличивать ω_0, пока не будет выполнено условие (11). При большом числе станций требование хорошей модуляции заставляет переходить к коротким волнам.

---

[1] [См. 17-ую лекцию.]

Все, что говорилось, относится и к телеграфной передаче. Здесь требование селективности накладывает ограничение на скорость передачи. Малый логарифмический декремент несовместим с быстротой работы. Но здесь требования — менее жесткие, чем при передаче звука. Для хорошей музыкальной передачи нужно передавать частоты до 5—10 тысяч колебаний в секунду. При радиотелефонных переговорах достаточно, чтобы хорошо передавались более низкие частоты. Хорошая телеграфная работа, довольно быстрая — 120 слов в минуту. Такая быстрота телеграфирования соответствует, грубо говоря, частоте модуляции около 150 колебаний в секунду. Это гораздо более медленная модуляция, чем в радиотелефонии. Кроме того, здесь не очень страшно, если кривая получается немного смазанной (рис. 63). Тем не менее даже в радиотелеграфии нельзя пользоваться теми малыми логарифмическими декрементами, которые нам доступны. Это привело бы к слишком сильному искажению сигналов.

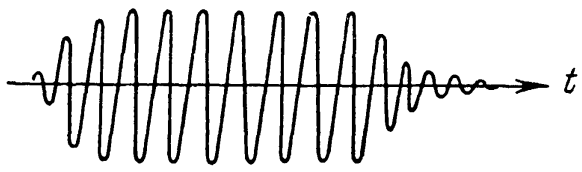


Рис. 63.

Итак, в случае приема с помощью линейной системы мы всегда находимся между Сциллой и Харибдой: требования селективности и хорошего воспроизведения модуляции противоречивы. Приходится каждый раз думать о том, какой выбрать компромисс. Если сообщается о сенсационном открытии, о новом принципе, устраняющем — в пределах линейных систем — противоречие между требованиями селективности и хорошего воспроизведения модуляции, то можно сразу сказать, что это неверно. Недавно сообщалось, что такой принцип найден и даже запатентован Робинсоном, но из этого ничего не вышло.

Мы разлагали простейшее модулированное колебание на три синусоидальных колебания. Флеминг[1] говорит следующее. Эти три волны „не реальны". Законодательство ограничивает частоту модуляции. Оно требует, чтобы при передаче модуляция была не более быстрой, чем 10 тысяч колебаний в секунду. Это мотивируется тем, что в противном случае близкие по частоте станции не смогут работать. Но так как боковые частоты не реаль-

[1] [A. Fleming. Nature, **125**, 92, 1930.]

ны, говорит Флеминг, то такое законодательство не имеет смысла.

Вопрос „реальны“ или „не реальны“ боковые полосы, не имеет смысла. Так вопрос ставить нельзя. Переход от формулы (9) к (10) — простая тригонометрия. Никакое приемное устройство не различит, имеется ли одна модулированная волна или соответствующие ей три волны от трех немодулированных передатчиков.

Вопрос о реальности боковых полос — это такой же вопрос, как, например, что реально: то, что $10=2+8$, или то, что $10=5+5$? Правильно ставить вопрос можно только так: как целесообразно в данном конкретном случае представить число 10. А это зависит от того, что вы хотите сделать.

По вопросу о „реальности“ боковых полос возникла целая литература[1].

СЕМНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(28/XII 1930 г.)

Действие помех на линейную колебательную систему с одной степенью свободы. Увеличение отношения сигнал/помеха при уменьшении затухания.

Рассмотрим действие помех на линейный контур. Помехи — явление непериодическое. Они имеют не дискретный, а сплошной спектр.

Вспомним некоторые соотношения, относящиеся к случаю действия синусоидальной внешней силы на линейную систему. Пусть

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2 x=E\cos pt. \tag{1}$$

Тогда при установившихся колебаниях

$$\begin{aligned} x&=X\cos(pt-\varphi),\\ \dot{x}&=-\dot{X}\sin(pt-\varphi), \end{aligned} \tag{2}$$

---

[1] [C. L. Fortescue, H. Bedford, H. W. Baxter и др. Nature, **125**, 198, 271, 1930; Exper. Wir. a. Wir. Eng., **7**, 119, 1930; **8**, 4, 257, 259, 312, 431, 538, 660, 1931.]

причем

$$X=\frac{E\sin\varphi}{2\delta p},\qquad \dot{X}=\frac{E\sin\varphi}{2\delta}, \tag{3}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\delta p}{\omega_0^2-p^2}. \tag{4}$$

Среднее значение какой-нибудь величины y есть

$$\bar{y}=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}y(t)\,dt, \tag{5}$$

или, если $y(t)$ — периодическая функция с периодом τ,

$$\bar{y}=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}y(t)\,dt. \tag{6}$$

Воспользуемся выражением (6) для вычисления среднего значения квадрата силы тока (или скорости). Имеем:

$$\overline{\dot{x}^2}=\dot{X}^2\,\overline{\sin^2(pt-\varphi)}.$$

Но

$$\overline{\sin^2(pt-\varphi)}=\frac{1}{2},$$

и, следовательно,

$$\overline{\dot{x}^2}=\frac{1}{2}\dot{X}^2=\frac{E^2}{8\delta^2}\sin^2\varphi.$$

Пусть W_p — объемная плотность энергии, создаваемая на месте приема передающей станцией. Тогда можно принять, что

$$E^2=\alpha W_p,$$

где α — некоторый коэффициент пропорциональности, зависящий, вообще говоря, от p. Следовательно,

$$\overline{\dot{x}^2}=\beta\frac{W_p\sin^2\varphi}{\delta^2}, \tag{7}$$

причем $\beta^2=\alpha/8$. В случае резонанса

$$\overline{\dot{x}^2}=\beta\frac{W_{\omega_0}}{\delta^2}. \tag{8}$$

Пусть теперь действует сумма синусоидальных э. д. с. разных периодов:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \sum_i E_i \cos(p_i t + \psi_i).$$

При установившемся колебании

$$\dot{x} = -\sum_i \dot{X}_i \sin(p_i t + \psi_i - \varphi_i),$$

где

$$\dot{X}_i = \frac{E_i \sin\varphi_i}{2\delta}.$$

Проводя аналогичный расчет с помощью (5), получаем:

$$\overline{\dot{x}^2} = \frac{1}{2}\sum_i \dot{X}_i^2 = \sum_i \frac{\beta_i}{\delta^2} W_{p_i} \sin^2\varphi_i. \qquad (9)$$

Рассмотрим теперь действие помех. Как сказано, помехи имеют непрерывный спектр (рис. 64). u_p есть спектральная плотность на частоте p. Это означает, что $u_p dp$ есть та часть объемной плотности энергии, которая относится к интервалу частот $(p, p+dp)$.

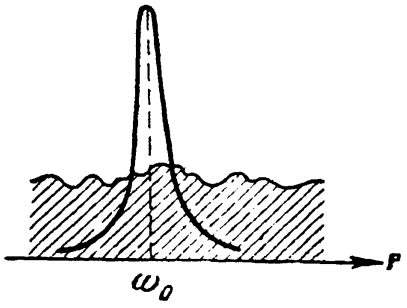


Рис. 64.

В случае помех сумму (9) нужно заменить интегралом, так что

$$\overline{\dot{x}^2} = \frac{1}{\delta^2}\int_0^\infty \beta u_p \sin^2\varphi\, dp. \qquad (10)$$

При достаточно малом δ существенную роль в интеграле играют только те „члены", в которых p близко к ω_0 (рис. 64); остальные практически ничего не дают. Поэтому мы можем написать приближенно вместо (10):

$$\overline{\dot{x}^2} = \frac{\beta_{\omega_0} u_{\omega_0}}{\delta^2}\int_{\omega_0-\Delta p}^{\omega_0+\Delta p} \sin^2\varphi\, dp. \qquad (11)$$

Но согласно (4)

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{(\omega_0 + p)(\omega_0 - p)}{2\delta p},$$

или приближенно, при $\delta \ll \omega_0$,

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\omega_0 - p}{\delta},$$

откуда

$$\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} = \frac{dp}{\delta}. \tag{12}$$

На основании (12) мы можем переписать (11) в таком виде:

$$\overline{\dot{x}^2} = \frac{\beta_{\omega_0} u_{\omega_0}}{\delta} \int_0^{\pi} d\varphi = \frac{\pi \beta_{\omega_0} u_{\omega_0}}{\delta}.$$

Таким образом, энергия от помех увеличивается с уменьшением коэффициента затухания δ обратно пропорционально его первой степени. Согласно же (8) энергия от регулярного сигнала частоты $p = \omega_0$ растет обратно пропорционально δ^2. Отношение

$$\frac{\text{энергия помех}}{\text{энергия регул. сигнала}} = \pi \frac{u_{\omega_0}}{W_{\omega_0}} \delta = \text{const} \cdot \delta = \text{const} \cdot d.$$

Отсюда видно, что для уменьшения относительной энергии помех нужно уменьшать логарифмический декремент контура.

Заметим, что в случае помех поглощаемая мощность не зависит от коэффициента затухания.

Когда мы уменьшаем затухание, оставляя постоянными ω_0 и p, то действие колебаний любой частоты увеличивается, но неодинаково. Действие колебаний той частоты, на которую контур настроен, возрастает гораздо больше, чем действие колебаний с частотами, далекими от резонанса. Этим и объясняется уменьшение отношения энергии помех к энергии сигнала при уменьшении затухания.

Представление энергии помех в виде

$$\int_0^{\infty} u_p dp$$

связано с теоремой Релея в теории интеграла Фурье[1].

На этом мы закончим изучение резонанса. Хотя мы рассмотрели резонанс в простейшей системе, мы затронули все же ряд вопросов, которыми нужно хорошо владеть. До сих пор в этих вопросах делаются грубые ошибки.

Возьмем, например, Флеминга. Это — крупный радиоспециалист, член Королевского общества (английской Академии наук). Его

[1] [См., например, Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье. М.—Л., 1941.]

книга „Волны в воде, воздухе и эфире" — в общем неплохая, там есть много интересных сведений. Но по поводу резонанса там имеется явный вздор. Говорится, например, что мальчик, стреляя из рогатки, может разрушить железнодорожный мост через Темзу. Это невозможно из-за затухания.

ВОСЕМНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(5/I 1931 г.)

Уравнение колебаний маятника с горизонтально и вертикально колеблющейся точкой подвеса. Контур с периодически меняющейся емкостью. Теория линейного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами.

Рассмотрим движение маятника, точка подвеса которого совершает заданное гармоническое колебание относительно инерциальной системы отсчета x_1, z_1.

Предположим сначала, что точка подвеса колеблется горизонтально (рис. 65). Пусть

$$x_0 = a\cos pt$$

есть координата точки подвеса в системе отсчета x_1, z_1. Напишем уравнение движения в неинерциальной системе отсчета x, z, в которой точка подвеса маятника покоится. Здесь нужно ввести силу инерции $(-m\ddot{x}_0)$, направленную по оси x, и уравнение движения таково:

$$I\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi - m\ddot{x}_0\cos\varphi, \qquad (1)$$

где I — момент инерции маятника, φ — угол отклонения, m — масса, l — длина, причем

$$I = ml^2.$$

При достаточно малых колебаниях можно считать приближенно, что

$$\sin\varphi = \varphi, \quad \cos\varphi = 1,$$

и уравнение (1) принимает вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = -\frac{\ddot{x}_0}{l} = -\frac{ap^2}{l}\cos pt. \qquad (2)$$

Это — уравнение вынужденных колебаний; маятник движется так же, как под действием заданной синусоидальной внешней силы.

Пусть теперь точка подвеса колеблется вертикально (рис. 66):

$$z_0 = a\cos pt.$$

Напишем и для этого случая уравнение движения в неинерциальной системе отсчета, относительно которой точка подвеса покоится.

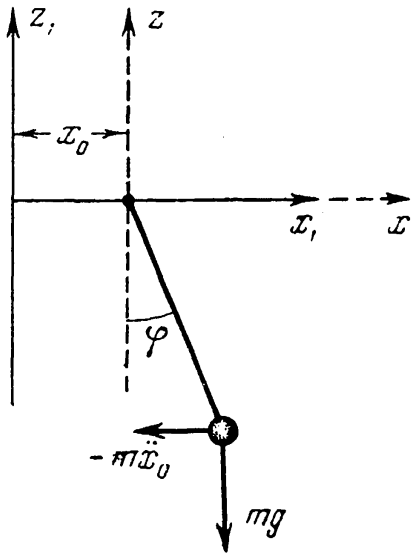


Рис. 65.

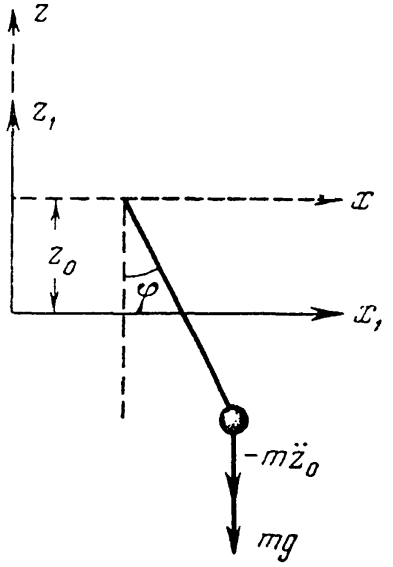


Рис. 66.

Теперь сила инерции $(-mz_0)$ направлена по оси z, и уравнение движения таково:

$$I\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi - m\ddot{z}_0\cos\varphi,$$

или приближенно, при малых φ,

$$\ddot{\varphi} + \frac{g+\ddot{z}_0}{l}\varphi = 0.$$

Подставляя сюда z_0, получаем:

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{l}(g - ap^2\cos pt)\varphi = 0. \qquad (3)$$

Это — уравнение совсем другого типа, чем (2). Система здесь также неавтономна, но нет периодической внешней силы: от времени зависит коэффициент при φ.

Рассмотрим еще один пример: колебательный контур, в котором емкость конденсатора периодически меняется со временем.

Будем считать, что конденсатор плоский и что расстояние d между пластинами меняется синусоидально:

$$d = d_0 (1 + k \cos pt).$$

Емкость равна

$$C = \frac{S}{4\pi d},$$

где S — площадь пластин. Заряд на конденсаторе q удовлетворяет, следовательно, уравнению

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{4\pi}{S}(1 + k \cos pt)\, q = 0.$$

Получилось уравнение того же типа, что и (3).

В последнее время физики заинтересовались задачами, приводящими к линейным уравнениям с периодическими коэффициентами. Такие задачи встречаются в небесной механике, в машиностроении (электровозы)[1], в теории твердого тела (вследствие периодичности кристаллической решетки потенциальная энергия электрона есть периодическая функция координат).

В этой лекции мы познакомимся с математической теорией линейных уравнений с периодическими коэффициентами вида

$$\ddot{x} + p_1(t)\,\dot{x} + p_2(t)\,x = 0, \tag{4}$$

причем $p_1(t)$ и $p_2(t)$ — периодические функции периода τ:

$$p_1(t + \tau) = p_1(t);$$
$$p_2(t + \tau) = p_2(t).$$

Уравнение (3) является частным случаем уравнения вида (4).

Будем считать, что уравнение (4) удовлетворяет условию Коши—Липшица и что, следовательно, существует решение, и притом единственное, удовлетворяющее произвольным заданным начальным условиям:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — линейно независимые частные решения уравнения (4). Общее решение может быть представлено в виде их линейной комбинации:

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2,$$

[1] [См. 19-ую лекцию.]

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Необходимым и достаточным условием линейной независимости функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ является неравенство нулю детерминанта Вронского:

$$W=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix}.$$

Любые два линейно независимые решения уравнения (4) образуют так называемую фундаментальную систему решений.

Рассмотрим частные решения $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ уравнения (4), удовлетворяющие следующим начальным условиям:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(0)&=1, \quad \psi(0)=0, \\ \dot{\varphi}(0)&=0, \quad \dot{\psi}(0)=1. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Согласно известной теореме теории линейных дифференциальных уравнений

$$W(t)=W(0)\,e^{-\int_0^t p_1(\xi)\,d\xi}. \tag{6}$$

В данном случае

$$W(0)=\begin{vmatrix} \varphi(0) & \psi(0) \\ \dot{\varphi}(0) & \dot{\psi}(0) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1, \tag{7}$$

и, следовательно,

$$W(t)=e^{-\int_0^t p_1(\xi)\,d\xi}\neq 0.$$

Таким образом, решения φ и ψ образуют фундаментальную систему.

Докажем теперь, что существует такое решение $x_1(t)$ уравнения (4), которое через период воспроизводит себя с точностью до постоянного множителя, т. е. такое, что

$$x_1(t+\tau)=sx_1(t), \tag{8}$$

где s — постоянная. Из (8) следует, что

$$x_1(t+n\tau)=s^n x_1(t).$$

Заметим, что если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — решения уравнения (4), то в силу периодичности коэффициентов этого уравнения $\varphi(t+\tau)$ и $\psi(t+\tau)$

тоже являются решениями. Как и всякое решение, они могут быть выражены линейно через фундаментальную систему $\varphi(t)$, $\psi(\tau)$:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(t+\tau)&=a\varphi(t)+b\psi(t),\\ \psi(t+\tau)&=c\varphi(t)+d\psi(t)\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

(a, b, c, d — постоянные), откуда

$$\left.\begin{aligned}\dot{\varphi}(t+\tau)&=a\dot{\varphi}(t)+b\dot{\psi}(t),\\ \dot{\psi}(t+\tau)&=c\dot{\varphi}(t)+d\dot{\psi}(t).\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Положив в (9) и (10) $t=0$ и приняв во внимание (5), получаем:

$$\left.\begin{aligned}a&=\varphi(\tau),\ b=\dot{\varphi}(\tau),\\ c&=\psi(\tau),\ d=\dot{\psi}(\tau).\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Возьмем теперь решение

$$x(t)=A\varphi(t)+B\psi(t), \tag{12}$$

где A, B — постоянные. Можно ли их подобрать таким образом, чтобы выполнялось соотношение (8)?

Подставляя (12) в (8), получаем:

$$A\varphi(t+\tau)+B\psi(t+\tau)=s[A\varphi(t)+B\psi(t)],$$

откуда, принимая во внимание (9),

$$[A(a-s)+Bc]\varphi+[Ab+B(d-s)]\psi=0.$$

Это равенство должно выполняться тождественно (при любом t). Так как $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ линейно независимы, отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned}A(a-s)+Bc&=0,\\ Ab+B(d-s)&=0.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Это — система линейных и однородных относительно A и B уравнений. Она имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix}a-s & c\\ b & d-s\end{vmatrix}=s^2-(a+d)s+\begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix}=0. \tag{14}$$

Пусть s_1 и s_2 — корни уравнения (14). Подставляя их значения в (13), мы находим из этих уравнений соответствующие значения отношения A/B:

$$\frac{A}{B}=-\frac{c}{a-s_1},\quad \frac{A}{B}=-\frac{c}{a-s_2}.$$

При таких значениях отношения A/B решение (12) удовлетворяет условию (8), т. е. воспроизводит себя через период с точностью до множителя s_1 или s_2. Если s_1 и s_2 не равны между собой, существует два линейно независимые решения, обладающие свойством (8). Обозначим их через $x_1(t)$ и $x_2(t)$:

$$x_1(t+\tau)=s_1x_1(t),$$
$$x_2(t+\tau)=s_2x_2(t).$$

Решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ также образуют фундаментальную систему.

Введем посредством соотношений

$$s_1=e^{\lambda_1\tau},\ s_2=e^{\lambda_2\tau}$$

новые постоянные λ_1 и λ_2. Они называются характеристическими показателями. Так как s_1 и s_2, вообще говоря, комплексны, то x_1, x_2, а также λ_1 и λ_2, вообще говоря, тоже комплексны.

Разложим s, λ и x на действительные и мнимые части:

$$s=a+ib;$$
$$\lambda=\alpha+i\beta;$$
$$x=\xi+i\eta.$$

Имеем:

$$s=e^{\alpha\tau}e^{i\beta\tau},\ x(t+\tau)=e^{\alpha\tau}e^{i\beta\tau}x(t).$$

Умножение на $e^{\alpha\tau}$ означает увеличение модуля x в $e^{\alpha\tau}$ раз; умножение на $e^{i\beta\tau}$ означает поворот вектора на комплексной плоскости на угол $\beta\tau$ (рис. 67). Вектор $x(t)$ за время τ поворачивается на некоторый угол, и если $\alpha>0$ — *удлиняется*, а если $\alpha<0$ — *укорачивается*. Если $\alpha=0$, вектор за время τ поворачивается, но длина его принимает исходное значение.

Но $\alpha=\ln|s|/\tau$, а следовательно:

$$\text{при } \alpha>0 \quad |s|>1,$$
$$\text{при } \alpha<0 \quad |s|<1,$$
$$\text{при } \alpha=0 \quad |s|=1.$$

На плоскости a, b (рис. 68, a) области внутри окружности $|s|=1$ соответствуют убывающие со временем решения, области вне этой окружности — возрастающие со временем решения, самой окружности — периодические решения. Соответствующие области

на плоскости α, β (рис. 68, *б*): полуплоскость левее оси $\alpha=0$, полуплоскость правее этой оси, сама ось $\alpha=0$.

Вспомним теперь, что s является корнем квадратного уравнения (14). Обозначим в нем:

$$p=a+d,\quad q=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \qquad (15)$$

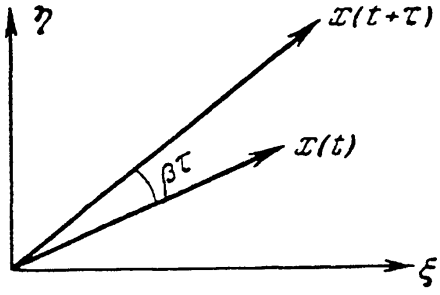


Рис. 67.

Решения φ и ψ действительны, так как коэффициенты уравнения (4), а также начальные значения (5) действительны. Поэтому a, b, c, d, а следовательно, и p, q — действительные постоянные. Необходимое и достаточное условие того, чтобы оба корня s_1 и s_2 уравнения (14)

$$s^2-ps+q=0$$

были по модулю меньше единицы ($|s_1|<1$, $|s_2|<1$), таково:

$$q<1,\ 1+p+q>0,\ 1-p+q>0.$$

Корни s_1 и s_2 действительны, если

$$p^2-4q\geqslant 0,$$

и комплексны, если

$$p^2-4q<0.$$

Таким образом, на плоскости p, q (рис. 69) случаю $|s_1|<1$, $|s_2|<1$ соответствует область внутри треугольника (—2,1), (2,1), (—1,0), заключенного между прямыми $q=1$, $1+p+q=0$, $1-p+q=0$.

В этом случае все решения уравнения (4) затухают к состоянию равновесия $x=0$, $\dot{x}=0$. В случае, когда хотя бы один из модулей $|s_1|$ или $|s_2|$ больше единицы, существует нарастающее решение — состояние равновесия неустойчиво. Значениям p и q, лежащим внутри параболы

$$4q=p^2$$

(заштрихованная область), соответствуют комплексные корни, значениям p и q вне заштрихованной области — два действительных корня. Точкам параболы соответствует кратный корень.

Если выполнено условие (8), т. е. если

$$x(t+\tau)=sx(t)=e^{\lambda\tau}x(t),$$

то функция

$$\Phi(t) = x(t)\, e^{-\lambda\tau}$$

есть периодическая функция с периодом τ. Это легко показать:

$$\Phi(t+\tau) = e^{-\lambda(t+\tau)} x(t+\tau) = e^{-\lambda\tau} e^{-\lambda\tau} x(t+\tau) = e^{-\lambda\tau} x(t) = \Phi(t).$$

Следовательно, решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ имеют вид:

$$x_1(t) = e^{\lambda_1\tau}\Phi_1(t), \quad x_2(t) = e^{\lambda_2 t}\Phi_2(t),$$

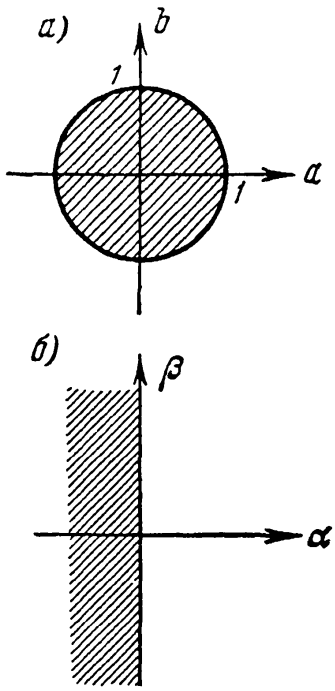


Рис. 68.

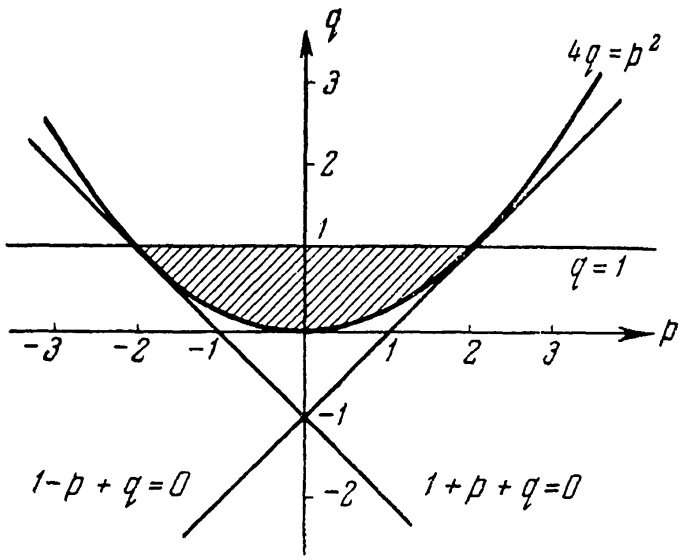


Рис. 69.

где $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ — периодические функции с периодом τ. Если $s_1 \neq s_2$, то общее решение уравнения (4) будет

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t}\Phi_1(t) + C_2 e^{\lambda_2 t}\Phi_2(t). \tag{16}$$

Можно показать, что в случае кратного корня ($s_1 = s_2$) уравнение (4) имеет частное решение вида

$$te^{\lambda t}\Phi(t),$$

и, следовательно, общее решение в этом случае имеет вид

$$x = C_1 e^{\lambda t}\Phi(t) + C_2 t e^{\lambda t}\Phi(t). \tag{17}$$

ДЕВЯТНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(8/I 1931 г.)

Примеры систем с периодически меняющимся параметром. Параметрический резонанс; его отличие от „обычного" резонанса. Физическое объяснение простейшего случая параметрического резонанса. Частотная модуляция. Ошибочное мнение о возможности сузить интервал частот, нужный для радиопередачи, посредством перехода к частотной модуляции. Асимптотическое решение для медленного изменения частоты и его разложение на синусоидальные составляющие. Как правильно записать „синусоидальное колебание с переменной частотой". Когда имеет смысл говорить о „синусоидальном колебании с переменной частотой".

Мы будем говорить о вещах, которые приобретают все большее значение. Можно сказать, пожалуй, что их „просмотрели". Отчасти на них навела практика.

Что будет с колеблющейся системой, если ее параметры изменяются со временем и притом периодически? Представим себе, например, маятник с периодически меняющейся длиной или колебательный контур с периодически меняющейся емкостью. Другие параметры (индуктивность, коэффициент трения) также могут меняться периодически. В случае одной степени свободы уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + p_1(t)\,\dot{x} + p_2(t)\,x = 0, \tag{1}$$

где $p_1(t)$ и $p_2(t)$ — периодические функции. Вопрос о том, как ведет себя интересующая нас система, сводится к исследованию, к интегрированию уравнения (1). Математическую теорию такого уравнения изложил в прошлой лекции А. А. Андронов. Теперь мы будем говорить главным образом о физике и лишь бегло повторим математику.

Пусть у нас имеется конденсатор, емкость которого периодически меняется. Для простоты мы предположим, что периодическое изменение происходит по закону синуса или косинуса. Уравнение

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0 \tag{2}$$

справедливо и при переменной емкости $C(t)$.

Будем менять периодически расстояние между пластинами плоского конденсатора. Тогда

$$\frac{1}{C(t)} = \frac{4\pi d(t)}{S\varepsilon}. \tag{3}$$

Пусть расстояние d меняется синусоидально:

$$d = d_0 + \delta \cos pt, \tag{4}$$

где p — частота изменения. Если подставить (3) и (4) в (2), то получится уравнение

$$\ddot{q} + \left(\frac{1}{LC_0} + \frac{4\pi}{LS\varepsilon}\delta \cos pt\right) q = 0, \tag{5}$$

где

$$C_0 = \frac{S\varepsilon}{4\pi d_0}.$$

Возьмем простой механический случай — прототип более сложных вещей. Масса M подвешена к упругому стержню (рис. 70). Она может колебаться в вертикальном направлении. Здесь уравнение движения будет

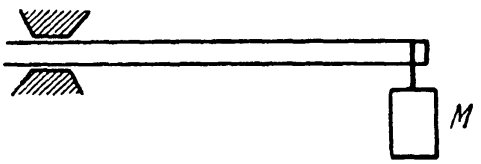


Рис. 70.

$$M\ddot{x} + kx = 0, \tag{6}$$

где k зависит от длины и материала стержня и от его сечения.

Если стержень (пусть это будет вал какой-нибудь машины) имеет эллиптическое сечение, то

$$k = k_0(1 + \delta \cos 2\theta), \tag{7}$$

где θ — угол поворота вала; δ — постоянная. При подстановке (7) уравнение (6) принимает вид

$$\ddot{x} + \frac{k_0}{M}(1 + \delta \cos 2\theta)\, x = 0. \tag{8}$$

Пусть вал вращается с постоянной угловой скоростью $p/2$. Тогда

$$\theta = \frac{pt}{2},$$

и (8) принимает вид

$$\ddot{x} + \frac{k_0}{M}(1 + \delta \cos pt)\, x = 0. \tag{9}$$

Получается такое же уравнение, что и для только что рассмотренного контура с конденсатором переменной емкости.

В уравнениях (5) и (9) величины

$$\omega_0^2 = 1/LC_0, \quad \omega_0^2 = \frac{k_0}{M}$$

играют роль квадрата частоты.

Обозначив

$$\alpha_0^2 = \frac{4\pi\delta}{LS\varepsilon} \text{ и } \alpha_0^2 = \frac{k_0\delta}{M},$$

мы можем привести уравнения (5) и (9) к виду

$$\ddot{x} + (\omega_0^2 + \alpha_0^2 \cos pt)\, x = 0. \tag{10}$$

Это — частный случай уравнения (1); здесь, во-первых, $p_1(t) = 0$ и, во-вторых, функция $p_2(t)$ синусоидальна.

Уравнение

$$\ddot{x} + p(t)\, x = 0,$$

где $p(t)$ — периодическая функция, называется уравнением Хилла. Наше уравнение (10) есть частный случай уравнения Хилла. Оно называется уравнением Матьё.

Мы знаем, что общее решение уравнения (1) имеет вид

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} \Phi_1(t) + C_2 e^{\lambda_2 t} \Phi_2(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные; λ_1 и λ_2 — постоянные, определяемые самим уравнением; $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ — периодические функции периода $\tau = 2\pi/p$.

Особенно важно знать, каковы λ_1 и λ_2. Вообще говоря, они комплексны:

$$\lambda_1 = a_1 + ib_1, \quad \lambda_2 = a_2 + ib_2.$$

В зависимости от того, каковы значения параметров, входящих в уравнение, действительные части a_1 и a_2 могут быть отрицательными, равными нулю или положительными. Вообще говоря, λ_1 и λ_2 различны. В том специальном случае, когда они равны, имеется частное решение вида

$$te^{\lambda} \Phi(t),$$

где $\Phi(t)$ — периодическая функция периода $\tau = 2\pi/p$.

То, что C_1 и C_2 входят в решение линейно, типично для линейных уравнений. Если $x = 0$ и $\dot{x} = 0$ при $t = 0$, то $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$. В этом случае x остается равным нулю при любом t. Таким обра-

зом, здесь совершенно другое положение, чем при обычном резонансе: если система в начале была в равновесии, то она остается в равновесии и в дальнейшем.

Но что будет с системой, если в начальный момент она не находится в равновесии? Все зависит от того, каковы a_1 и a_2.

Если обе эти величины отрицательны, то со временем амплитуда величины x убывает. При таком подборе значений параметров система совершает затухающее колебание.

Если $\lambda_{1,2}$ — чисто мнимые, то решения периодические или почти периодические.

Если величина a_1 положительна, то (за исключением случая, когда $C_1=0$ и $a_2<0$) амплитуда величины x все больше и больше возрастает.

Итак, положение равновесия всегда имеется, но равновесие может быть как устойчивым, так и неустойчивым. В последнем случае система, будучи выведена из состояния равновесия, автоматически себя раскачивает. Это свойство — рост колебаний — придает всему явлению характер резонанса. Мы говорим при этом о *параметрическом* возбуждении или о *параметрическом резонансе.*

При каких условиях наступает раскачивание, не так просто поддается вычислению. Физически дело сводится, грубо говоря, к следующему: возрастание колебаний происходит тогда, когда подобран правильный темп изменения параметра.

Возьмите конденсаторную цепь. Будем менять емкость скачками. Пусть в некоторый начальный момент имеется маленький заряд $q=q_0$, а тока нет ($\dot{q}=0$). Раздвинем в этот момент пластины конденсатора. Мы затрачиваем на это некоторую работу. Через $^1/_4$ периода заряд обращается в нуль, и в этот момент мы сведем пластины до прежнего расстояния. При этом никакой работы не совершается. Через $^1/_2$ периода после начала опять имеется заряд, и мы снова разводим пластины, совершая работу; через $^3/_4$ периода мы опять их сводим, и т. д. Затрачиваемая нами работа должна увеличить запас электромагнитной энергии в контуре. Отсюда видно, что если раздвигать и сдвигать пластины с периодом, вдвое меньшим, чем средний собственный период контура, то непременно наступает раскачивание. Это — частный случай, его трудно вполне точно осуществить на практике. Но здесь ясно, как и почему происходит раскачивание. Что будет в остальных случаях, „на пальцах“ показать довольно трудно.

На этот вопрос дает ответ график (рис. 71), построенный для уравнения (10). В заштрихованной части плоскости есть нарастание колебаний, в незаштрихованной части нарастания нет.

Пусть относительная амплитуда изменения параметров постоянна:

$$\frac{\alpha_0}{\omega_0} = \text{const}.$$

Будем менять только частоту изменения параметра p. Первая область нарастания колебаний соответствует частоте изменения

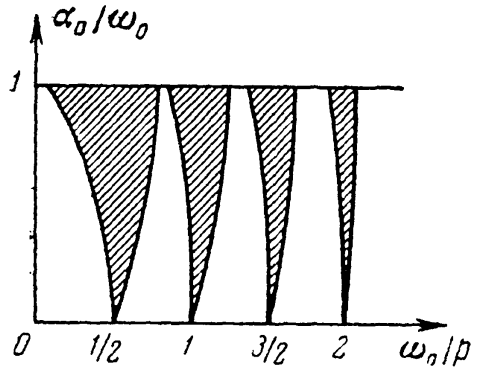


Рис. 71.

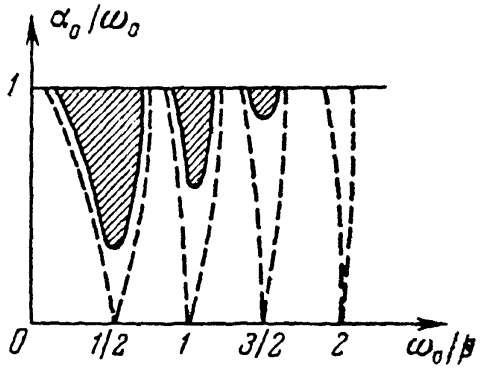


Рис. 72.

параметров, приблизительно вдвое большей, чем частота собственных колебаний. Во второй области частота собственных колебаний и частота изменения параметров приблизительно равны. В третьей области частота p приблизительно в полтора раза меньше собственной и т. п. Таких *областей нестабильности* оказывается бесконечно много.

С увеличением относительной амплитуды изменения параметра ширина каждой области частот p, в которой происходит нарастание, увеличивается.

Итак, мы видим, что явление параметрического резонанса существенно отличается от обычного резонанса. Отличие состоит в том, что:

1. Если система находится строго в положении равновесия, то при периодическом изменении параметра она не раскачивается.

2. Несмотря на то, что воздействие косинусообразно, существует бесконечно много областей параметрического резонанса, и притом именно *областей*, а не точек.

Наличие затухания смазывает явление. Оно вызывает появление порога возбуждения (рис. 72). Области нестабильности,

соответствующие все меньшим отношениям p/ω_0, начинаются все выше и выше. Поэтому очень трудно получить на практике далекие области возбуждения.

Из линейности уравнения следует, что и при наличии трения (если оно линейно) в областях нестабильности имеет место бесконечное нарастание.

Как и всегда, при наличии нестабильности линейное уравнение недостаточно для описания всего хода явления. Оно не дает установления колебания. Установление стационарной амплитуды возможно только вследствие нелинейности.

Иллюстрацией явления параметрического резонанса является известный опыт Мельде (рис. 73). Когда камертон колеблется, натяжение струны — параметра, от которого зависит частота ее поперечных колебаний, — периодически меняется. Когда собственная частота поперечных колебаний струны приблизительно вдвое меньше частоты камертона, происходит возбуждение этих колебаний.

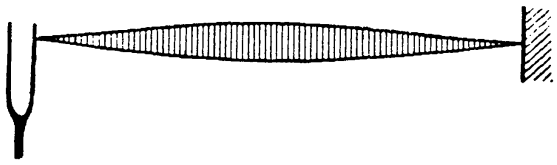


Рис. 73.

В технике на возможность возбуждения колебаний путем изменения параметров обратили внимание, повидимому, при постройке электровозов. В электровозе упругость передающей системы, соединяющей вал мотора с ведущей осью, периодически меняется. Получаются собственные колебания системы с переменной упругостью. Многие неудачи произошли от того, что этого раньше не замечали.

В последнее время явлениями в системах с периодически меняющимися параметрами стали заниматься в связи с тем, что они позволяют трансформировать частоты „вниз“ (трансформировать частоты „вверх“ сравнительно легко; трансформировать вниз гораздо труднее). С помощью явлений, о которых мы сейчас говорим, эта задача может быть решена.

В электрических контурах имеется значительное затухание, но теперь мы имеем средство уменьшать затухание. Это достигается с помощью обратной связи. Уменьшая затухание, можно сделать явления параметрического возбуждения гораздо более ярко выраженными.

Посылая ток в катушку с железным сердечником, мы изменяем коэффициент самоиндукции. Пользуясь этим, можно сравнительно

просто осуществить контур с периодически меняющейся индуктивностью.

Как происходит раскачивание качелей? На них раскачиваются, периодически поднимая и опуская свое тело. Это — параметрический резонанс. Раскачивание возможно только, если есть хотя бы маленький начальный толчок. Здесь происходит то же явление, как в контуре с конденсатором переменной емкости, но в более сложном виде.

Есть другой круг вопросов, где мы также приходим к уравнениям с периодическими коэффициентами, но где нас интересуют не области нестабильности. Это — вопросы модуляции. Модуляция в радиотелефонии обычно состоит в том, что амплитуда колебания меняется в темпе звукового колебания в передаваемом разговоре.

Модулированное колебание, воспринимаемое приемником, имеет в простейшем случае вид

$$E = A_0(1 + k\cos pt)\cos \omega t,$$

или, *что то же самое*,

$$E = A_0 \cos \omega t + \frac{kA_0}{2}\cos(\omega - p)t + \frac{kA_0}{2}\cos(\omega + p)t.$$

Представление модулированного колебания в виде суммы трех синусоидальных колебаний целесообразно тогда, когда мы имеем три резонатора, которые отзываются на частоты ω, $\omega - p$ и $\omega + p$.

В колебании модулированного передатчика, наряду с линией частоты ω, имеются, таким образом, боковые полосы или боковые спектры. Если мы хотим сохранить особенности передачи, то мы должны принять не только частоту ω, но и боковые полосы. Они занимают довольно большое место в спектре.

Явилось желание передавать речь, не занимая такую широкую полосу частот. Рассуждали приблизительно следующим образом: если приемник, обладающий острым резонансом, слегка расстроить и если с помощью голоса менять *частоту* передатчика в темпе звукового колебания, то придется лишь немного менять частоту передатчика, чтобы ток в приемнике, изменяясь на склоне резонансной кривой, пульсировал очень сильно. Именно на таких соображениях основывалось упомянутое ранее „изобретение" Робинсона[1].

---

[1] [См. 1-ую лекцию.]

Но дело в том, что чем меньше затухание контура, тем медленнее устанавливается в нем колебание. Крутизна резонансной кривой имеет смысл только для *установившегося* режима. Таким образом, приведенное рассуждение в корне неправильно.

Для того, чтобы узнать, что происходит в действительности, нужно разложить колебание, создаваемое передатчиком, в ряд по синусам и косинусам. В общем случае систем с периодически меняющимся параметром это довольно сложно, но в данном случае есть одно облегчающее обстоятельство. Нас интересует случай, когда частота модуляции p гораздо меньше, чем ω. А. А. Андронов и М. А. Леонтович нашли для этого случая асимптотическое решение[1]. При $p \to 0$ общее решение уравнения (10) стремится к такому:

$$x = C\,(\omega_0^2 + \alpha_0^2 \cos pt)^{-1/4} \cos\left(\int_0^t \sqrt{\omega_0^2 + \alpha_0^2 \cos pt}\, dt + b\right), \qquad (11)$$

где C и b — произвольные постоянные.

То, что при периодическом изменении емкости меняется и амплитуда, имеет принципиальное значение[2]. Однако практически малые изменения амплитуды не играют роли, и мы можем написать с известным приближением, при достаточно малом α_0:

$$x = C' \cos\left(\int_0^t \sqrt{\omega_0^2 + \alpha_0^2 \cos pt}\, dt + b\right). \qquad (12)$$

Можно ли сказать, что (10) представляет собой косинусообразное колебание с переменными амплитудой и частотой? Не вводя нового представления, говорить о косинусообразном колебании с переменной амплитудой и переменной частотой бессмысленно. Косинусообразное колебание определено, как колебание вида

$$A \cos(\omega t + \varphi), \qquad (13)$$

с *постоянными* A, ω и φ. Но при достаточно медленном изменении величины A со временем может случиться, что если мы найдем решение какой-нибудь задачи для постоянного A и подставим в это готовое решение, вместо постоянного A, *переменное* A,

---

[1] [Журнал Русского физико-химического общества, 1927, **59**, 429.]

[2] [См. 11-ую и 12-ую лекции.]

то мы получим с достаточным приближением решение той же задачи для переменного A. В этом случае можно говорить об $A(t)\cos(\omega t+\varphi)$, как о косинусообразном колебании с переменной амплитудой. Аналогично можно определить колебание с переменной частотой.

Но как записать косинусообразное колебание с переменной частотой? Вернемся к нашей формуле (11). Мы склонны сказать, что медленно меняющейся частотой является величина

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2+\alpha_0^2\cos pt}. \tag{14}$$

Это требует разъяснения. Если мы подставим (14) в формулу (13), подобно тому, как вместо постоянного A в нее можно подставить $A(t)$, мы получим:

$$x=A\cos\left(\sqrt{\omega_0^2+\alpha_0^2\cos pt}\cdot t+\varphi\right).$$

Получится совсем не то, что мы хотели сказать, говоря об ω, как о переменной частоте. Записывать таким способом колебание с переменной частотой неверно.

Что такое период? Если функция имеет период τ, это значит, что она имеет одно и то же значение при $t=t_1$ и при $t=t_1+\tau$.

Если „период τ медленно меняется“ и частота

$$\frac{2\pi}{\tau}=\omega=\omega_0+\varphi(t)=f(t), \tag{15}$$

то косинус с периодом τ следует записать так:

$$\cos F(t), \tag{16}$$

где

$$F'(t)=f(t),\quad F(t)=\int_0^t f(t)\,dt.$$

Это можно пояснить такой аналогией. При равномерном движении

$$x=vt. \tag{17}$$

Переходя к медленно меняющейся скорости

$$v=v_0+\alpha t, \tag{18}$$

нужно написать

$$\frac{dx}{dt}=v_0+\alpha t,$$

и интегрировать, а не подставлять (18) в готовую формулу (17).

Покажем, что при записи (16) мы получаем именно то, что хотели. При t, близком к t_1, мы имеем приближенно:

$$\cos F(t) = \cos[F(t_1) + F'(t_1)(t - t_1)],$$

или

$$\cos F(t) = \cos[F'(t_1)\, t + \text{const}] = \cos[f(t_1)\, t + \text{const}],$$

т. е. при t, близком к t_1, значение функции действительно повторяется через промежутки времени τ, определяемые формулой (15). Значит, если мы хотим, чтобы период равнялся $2\pi/f(t)$, то мы должны записать колебание в виде

$$A\cos\left(\int_0^t f(t)\,dt + \text{const}\right).$$

Нахождение асимптотического выражения дало для частоты значение (14).

Для того, чтобы ответить на вопрос о том, дает ли частотная модуляция выигрыш в ширине полосы, нужно разложить (12) в ряд Фурье. При этом оказывается, что никакого выигрыша нет.

Пусть

$$\alpha_0^2 \ll \omega_0^2.$$

Тогда приближенно

$$\sqrt{\omega_0^2 + \alpha_0^2 \cos pt} = \omega_0\left(1 + \frac{\alpha_0^2}{2\omega_0^2}\cos pt\right),$$

и формула (12) принимает вид

$$x = C'\cos\left(\omega_0 t + \frac{\alpha_0^2}{2\omega_0 p}\sin pt\right) \tag{19}$$

(если выбрать начало отсчета времени так, что $b = 0$).

Мы можем представить (19) в таком виде:

$$x = C'\cos\omega_0 t\cos\left(\frac{\alpha_0^2}{2\omega_0 p}\sin pt\right) - C'\sin\omega_0 t\sin\left(\frac{\alpha_0^2}{2\omega_0 p}\sin pt\right).$$

Если

$$\frac{\alpha_0^2}{2\omega_0 p} \ll 1,$$

то приближенно имеем:

$$\cos\left(\frac{\alpha_0^2}{2\omega_0 p}\sin pt\right)=1,\quad \sin\left(\frac{\alpha_0^2}{2\omega_0 p}\sin pt\right)=\frac{\alpha_0^2}{2\omega_0 p}\sin pt,$$

$$x=C'\left(\cos\omega_0 t+\frac{\alpha_0^2}{4\omega_0 p}\cos(\omega_0+p)t-\frac{\alpha_0^2}{4\omega_0 p}\cos(\omega_0-p)t\right). \quad (20)$$

Мы получаем и здесь несущую частоту ω_0 и боковые полосы $\omega_0 \pm p$. Никакого сужения полосы при частотной модуляции не получается, но здесь есть много интересных особенностей по сравнению с амплитудной модуляцией[1].

Вернемся к вопросу о „синусоидальном колебании с переменной амплитудой и частотой".

Сложение двух синусоидальных колебаний дает:

$$\cos\omega t+\cos\omega_1 t=2\cos\frac{\omega+\omega_1}{2}t\cos\frac{\omega-\omega_1}{2}t. \quad (21)$$

Если разность частот ω и ω_1 достаточно мала, то можно сказать: здесь получается одно колебание с периодически меняющейся амплитудой. Аналогичным образом, согласно формуле (20), можно сказать: сложение трех колебаний различной частоты может дать одно колебание с периодически изменяющейся частотой. Это тригонометрия, это математически правильно. Но при каких условиях имеет смысл говорить об одном колебании с переменной амплитудой или частотой? Часто говорят: это имеет смысл тогда, когда $\omega-\omega_1$ или p мало по отношению к ω. Но это неверно, не в этом соль. Нужно знать, *для чего* требуется говорить об одном колебании с переменной амплитудой или частотой, что вы хотите делать с этим колебанием.

Предположим, что нам нужно решить задачу о приеме колебания с помощью резонатора. Для того, чтобы можно было при этом обращаться с (12) или (21), как с обычным синусоидальным колебанием, а потом подставить в результат переменную амплитуду или частоту, нужно, чтобы данный приемник примерно одинаково воспроизводил все синусоидальные слагаемые. Так ли обстоит дело или нет, — это зависит от логарифмического декремента приемника. Как бы ни было мало $|\omega-\omega_1|$ или p по отношению к ω_0, если логарифмический декремент приемника доста-

[1] [Ср. том III, стр. 410.]

точно мал, то он пропустит отдельные синусоидальные слагаемые по-разному. Он их пропустит приблизительно одинаково — и тогда целесообразно говорить о косинусе с переменной амплитудой или частотой, — когда

$$\frac{|\omega - \omega_1|}{\omega} \ll \frac{d}{2\pi} \quad \text{или} \quad \frac{p}{\omega} \ll \frac{d}{2\pi}.$$

Критерием того, когда имеет смысл говорить о функции, как о косинусе с переменной амплитудой, а когда нет, лежит *вне* самой функции, из самой функции это вычитать нельзя.

При переменной частоте картина боковых полос несколько сложнее, чем при переменной амплитуде, кроме того простого частного случая, для которого можно пользоваться приближенной формулой (20).

ДВАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(15/I 1931 г.)

Интеграл Фурье. Разложение в интеграл Фурье отрезка синусоиды. Несовместимость монохроматичности и концентрированности сигнала. Аналогия с соотношением неопределенностей в волновой механике. Рассмотрение действия произвольной внешней силы на гармонический осциллатор без разложения в спектр.

Мы рассматривали действие периодической силы на линейную колебательную систему с одной степенью свободы[1]. Повторяющиеся импульсы (рис. 62) физически полностью подходят под случай периодической силы. Нового математического аппарата здесь не нужно. Но *сигналом* может быть только не повторяющееся периодически воздействие. Периодическое воздействие — это не сигнал.

В конечном интервале можно разложить в ряд Фурье функцию, изображающую любое воздействие. Но вне этого интервала функция, представленная рядом, периодически повторяется. Если мы возьмем на оси t очень большой интервал и разложим функцию, изображающую воздействие в ряд Фурье в этом интервале, то

[1] [См. 16-ую лекцию.]

функция, представляемая рядом, будет повторяться бесконечное число раз, но через очень большие интервалы. Если интервал разложения достаточно велик, то физически совершенно безразлично, что было раньше начала этого интервала и что будет после его конца. Поэтому мы можем искусственно заменить интересующий нас сигнал периодически повторяющейся силой, представленной рядом Фурье.

Что значит здесь „достаточно большой интервал времени"? Нужно, чтобы к началу реального сигнала успело давно затухнуть то, что дал бы предыдущий искусственный сигнал. Поэтому, чем меньше затухание воспринимающего устройства, тем больше должен быть интервал.

Уравнение движения осциллатора под действием произвольной внешней силы имеет вид

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t). \qquad (1)$$

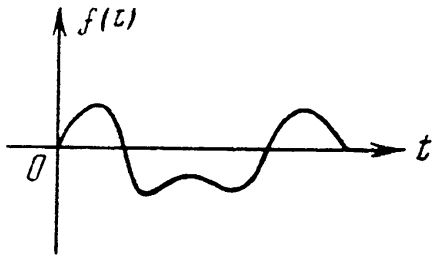


Рис. 74.

Пусть сила $f(t)$ отлична от нуля лишь на протяжении конечного промежутка времени, начиная с $t=0$ (рис. 74). Здесь начальные условия: $x=0$, $\dot{x}=0$ при $t=0$. Разложим силу в ряд Фурье за достаточно большой (по сравнению с $1/\delta$) промежуток времени и возьмем периодическое решение уравнения (1), являющееся суммой периодических вынужденных колебаний, соответствующих всем членам разложения Фурье. Решение удовлетворяет вполне определенным начальным условиям, так как не содержит произвольных постоянных. Можно показать, что это как раз начальные условия $t=0$, $x=0$, $\dot{x}=0$. Таким путем мы получаем то, что нам нужно. Физически ясно, почему это так. В течение всего бесконечного времени никакие силы, кроме $f(t)$, на осциллатор не действуют. Разложение в ряд Фурье приводит к замене $f(t)$ периодической функцией. Так как промежутки, на протяжении которых эта периодическая функция равна нулю, велики по сравнению со временем затухания осциллатора, периодическое решение спадает до нуля к концу этих промежутков, в частности к моменту $t=0$.

Итак, решение в виде ряда Фурье является решением задачи с определенными начальными условиями. К нему можно прибавить собственные колебания и удовлетворить таким образом любым начальным условиям.

Можно решить задачу иначе: не представляя силы в виде ряда Фурье и учитывая явно начальные условия[1]. Часто это целесообразнее. Оба способа дают принципиально одно и то же.

Остановлюсь на вопросе, имеющем принципиальное значение, хотя практически он может быть обойден. Можно ли для любой непериодической функции найти разложение, аналогичное ряду Фурье для периодической функции (т. е. разложение на синусы и косинусы), представляющее функцию на всем бесконечном интервале?

Мы рассмотрим вопрос эвристически. Математическое доказательство мы оставим в стороне.

Мы писали ряд Фурье в таком виде:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega t+b_k\sin k\omega t), \tag{2}$$

$$a_k=\frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega}f(\xi)\cos k\omega\xi\,d\xi,\quad b_k=\frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega}f(\xi)\sin k\omega\xi\,d\xi, \tag{3}$$

$\omega=\frac{2\pi}{T}$, где T — период функции $f(t)$. Можно переписать ряд Фурье немного иначе, обозначив

$$a'_k=\frac{a_k}{\omega}\sqrt{\frac{\pi}{2}},\quad b'_k=\frac{b_k}{\omega}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{4}$$

Мы получаем тогда:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}(\omega a'_k\cos k\omega t+\omega b'_k\sin k\omega t).$$

Посмотрим теперь, что получится, если переходить к пределу

$$\omega\to 0,\quad T\to\infty.$$

Напишем:

$$k\omega=u_k,\quad \omega=\Delta u\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{5}$$

(Δu есть разность двух последовательных значений u_k). Тогда

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\Delta u\,(a'_k\cos u_k t+b'_k\sin u_k t). \tag{6}$$

---

[1] [См. ниже формулу (15).]

При $\omega \to 0$ интервалы Δu сужаются. Если $\omega \to 0$, то мы можем ожидать, что сумма в (6) превратится в интеграл.

Для разложимости в ряд Фурье функция $f(t)$ должна быть всюду ограничена и изображающая ее кривая должна разбиваться на конечное число непрерывных кусков. Теперь, при $\omega \to 0$, мы должны еще сказать, как ведет себя функция $f(t)$ в бесконечности. Потребуем, чтобы

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{+T/2} |f(\xi)|\, d\xi$$

был конечной величиной, т. е. чтобы функция $f(t)$ была абсолютно интегрируемой. В этом случае при $\omega \to 0$ имеем:

$$a_0 \to 0.$$

Коэффициенты a'_k и $b'_k (k \neq 0)$ мы можем представить, подставляя (3) и (5) в (4), в виде функции от u:

$$a'(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{+T/2} f(\xi) \cos u\xi\, d\xi, \quad b'(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{+T/2} f(\xi) \sin u\xi\, d\xi.$$

Переходя к пределу, получаем:

$$\lim_{T\to\infty} a'(u) = g_1(u), \quad \lim_{T\to\infty} b'(u) = g_2(u),$$

причем

$$g_1(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos u\xi\, d\xi, \quad g_2(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin u\xi\, d\xi. \tag{7}$$

Таким образом, у нас есть основания ожидать, что функция $f(t)$ может быть записана в виде интеграла

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \{g_1(u) \cos ut + g_2(u) \sin ut\}\, du. \tag{8}$$

Это — интеграл Фурье. Мы *не* доказали, что всякая функция, удовлетворяющая определенным условиям, может быть разложена в интеграл Фурье, но можно доказать, что всякая функция $f(t)$, определенная в бесконечном промежутке, удовлетворяющая в каждом конечном участке условиям Дирихле и такая, что интеграл

от ее абсолютного значения существует, может быть разложена в интеграл Фурье.

Обычно выполняют подстановку (7) в (8). При этом получается формула

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos u(t-\xi)\,d\xi \tag{9}$$

— другое написание знаменитой теоремы Фурье или, как ее часто называют, формулы Фурье.

Если функция $f(t)$ разрывна, то интеграл Фурье имеет в точках разрыва значение

$$\frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)].$$

Как уже было сказано, в обычных колебательных вопросах можно обойтись без интеграла Фурье, так как в них продолжение интервала разложения в бесконечность не играет фундаментальной роли. Но в волновой механике продолжение интервала разложения в бесконечность и применение интеграла Фурье играет весьма существенную роль. Для ряда принципиальных вопросов интеграл Фурье представляет фундаментальный интерес.

Укажем теперь некоторые свойства функций, которые можно вычитать из их представления с помощью интеграла Фурье. Некоторые представления, играющие чрезвычайно важную роль в современной физике, основываются на одном, редко формулируемом, свойстве интеграла Фурье. Для того, чтобы показать, о чем идет речь, возьмем простейший пример. Заметим, что для двух классов функций — для функций четных и для функций нечетных — общая формула (8) значительно упрощается.

Пусть

$$f(t)=f(-t)$$

четная функция). Тогда

$$g_1(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(\xi)\cos u\xi\,d\xi, \quad g_2(u)=0.$$

Пусть

$$f(t)=-f(-t)$$

(нечетная функция). Здесь

$$g_1(u)=0, \quad g_2(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(\xi)\sin u\xi d\xi.$$

Представим теперь в виде интеграла Фурье функцию, заданную уравнениями (рис. 75):

$$f(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<-T/2,\\ \sin\omega t & \text{при } -T/2\leqslant t\leqslant T/2,\\ 0 & \text{при } t>T/2,\end{cases} \tag{10}$$

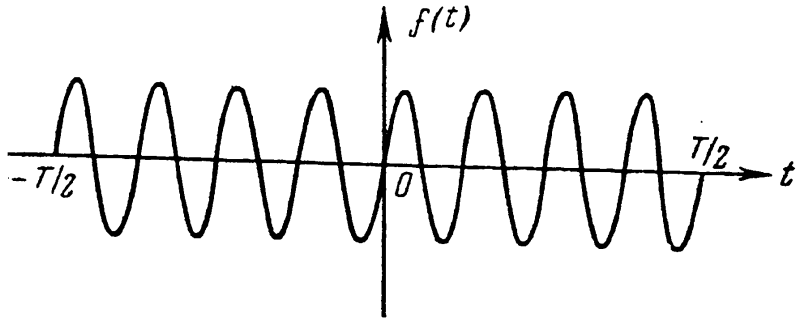


Рис. 75.

причем промежуток T содержит целое число $2N$ полных колебаний:

$$T=2N\tau=2N\frac{2\pi}{\omega} \quad (N\text{ — целое}).$$

Функция $f(t)$ — нечетная. Поэтому

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(u)\sin ut\,du, \tag{11}$$

где

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(\xi)\sin u\xi d\xi. \tag{12}$$

Отсюда, между прочим, видно, для чего мы ввели множители $\sqrt{\pi/2}$ в выражения (4). При таком выборе коэффициентов в (11) и (12) получается полная взаимность функций f и g.

Подставим (10) в (12):

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{T/2}\sin\omega\xi\sin u\xi d\xi,$$

или

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(uT/2)}{u^2-\omega^2}. \tag{13}$$

Каков физический смысл величины $g(u)$? Функция (10) есть конгломерат синусоидальных колебаний с непрерывно меняющейся от колебания к колебанию амплитудой $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,g(u)\,du$. Величина $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,g(u)$ есть плотность амплитуд в спектральной области $(u,\ u+du)$.

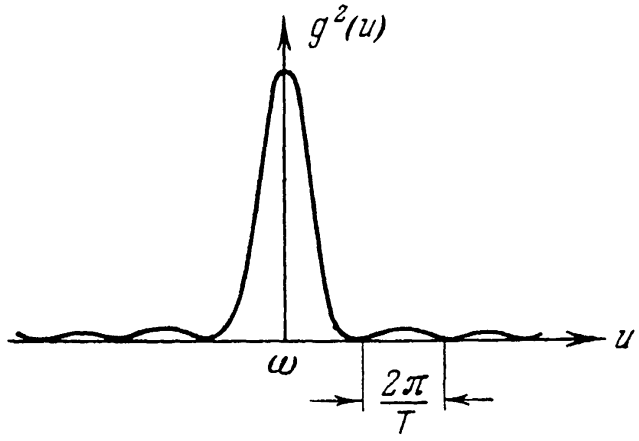


Рис. 76.

Займемся исследованием функции $g(u)$. Легко видеть, что самый большой ее максимум находится там, где $u=\omega$. Несмотря на равенство нулю знаменателя, этот максимум конечен, так как при $u=\omega$ имеем $\sin(uT/2)=0$. Раскрывая в (13) неопределенность при $u=\omega$, получаем для максимальной плотности амплитуд значение

$$g(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{N\tau}{2\omega}. \tag{14}$$

Будем откладывать по оси абсцисс u, а по оси ординат — квадрат плотности амплитуд (рис. 76). Найдем плотность амплитуд $g(u_1)$ в том максимуме, который соответствует расстройке:

$$\frac{u_1-\omega}{\omega}=\alpha.$$

Считая (приближенно), что в максимуме $\sin(uT/2)=1$,, получаем

$$g(u_1)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{(u_1-\omega)(u_1+\omega)},$$

или приближенно

$$g(u_1)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{2\omega}\cdot\frac{\tau}{2\pi\alpha}.$$

Следовательно,

$$\frac{g(\omega)}{g(u_1)}=2\pi\alpha N.$$

Чем больше N, тем больше при заданном α это отношение.

Итак, мы задались конечным отрезком синусоиды. Мы разложили его в интеграл Фурье, и мы толкуем этот результат как разложение на всевозможные монохроматические колебания. Коль скоро отрезок синусоиды конечен, он не монохроматичен. Он состоит из бесконечного числа — континуума — монохроматических колебаний. В этом конгломерате особенно сильно представлены определенные монохроматические колебания, — те, период которых очень близок к периоду того монохроматического колебания, частью которого является наш отрезок синусоиды. Они играют тем более доминирующую роль, чем он длиннее. Иначе говоря, чем длиннее отрезок синусоиды, тем он более монохроматичен. При малом N монохроматичность пропадает: колебания, сильно различающиеся по частоте, представлены примерно одинаково сильно.

Назовем величину, характеризующую протяженность отрезка синусоиды во времени, его расплывчатостью. Тогда можно сказать, что если отрезок расплывчат, то он может быть очень монохроматичен, но концентрированность сигнала во времени (малая расплывчатость) и его монохроматичность — противоречивые свойства. Всегда монохроматичность достигается в ущерб концентрации сигнала.

Мы рассмотрели частный пример отрезка синусоиды. Возьмем теперь другой частный пример:

$$f(t) = e^{-k^2t^2}\cos\omega t.$$

Если k очень мало, то амплитуда изменяется очень медленно — сигнал весьма расплывчат. И здесь можно показать, что если k мало, то колебания очень монохроматичны, а если k велико, то происходит потеря монохроматичности.

Можно и нужно ввести меру (критерий) монохроматичности и меру (критерий) расплывчатости (или, что то же самое, меру немонохроматичности и меру концентрированности), и нужно показать, как мера расплывчатости связана с мерой монохроматичности. Для общего случая это не сделано[1].

Мы знаем, мы на этом останавливались[2], почему вопросы спектрального разложения играют в физике существенную роль.

---

[1] [См. А. Г. Майер и М. А. Леонтович. Об одном неравенстве, связанном с интегралом Фурье. ДАН, **4**, 353, 1934.]

[2] [См. 16, 20-ую и 21-ую лекции.]

Так, например, монохроматический свет дает при падении на диффракционную решетку острые максимумы, резкие линии. Монохроматический свет другой длины волны дает резкие линии в другом месте. Для того, чтобы узнать, что будет после падения на диффракционную решетку данного импульса, данного светового сигнала, мы должны разложить его в ряд или в интеграл Фурье. Диффракционная решетка, так же как резонатор, выделяет монохроматические волны. Решетка — это тоже реактив на монохроматичность. Поэтому и здесь важно знать, что концентрированный сигнал не может быть монохроматическим.

В волновой механике ставятся аналогичные вопросы. Идеи, связанные с появлением волновой механики, мы здесь оставим в стороне. Однако я не могу не упомянуть о том, какую роль играет в волновой механике теорема о несовместимости монохроматичности и концентрированности.

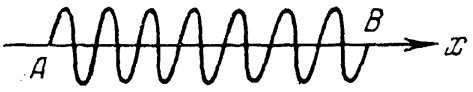


Рис. 77.

В волновой механике утверждается, что с электроном сопряжена волна, квадрат амплитуды которой дает вероятность того, что электрон находится в данном месте. Пусть волна имеет форму рассмотренного нами отрезка синусоиды (рис. 77). Волновая механика истолкует это так: левее A вероятность нахождения электрона равна нулю, между A и B она имеет некоторое постоянное значение, правее B она снова равна нулю.

Бесконечная монохроматическая волна соответствует электрону с определенной, фиксированной скоростью. Но пусть волна немонохроматическая. Тогда можно говорить о вероятности того, что скорость находится в данных границах. Волновая механика утверждает следующее. Нужно разложить заданную волну на сумму монохроматических волн (бесконечных синусоид). Тогда вероятности того, что электрон имеет ту или другую скорость, относятся друг к другу, как квадраты амплитуд соответствующих этим скоростям монохроматических волн (для точности здесь нужно говорить об интеграле Фурье и об отношении квадратов амплитудных плотностей).

Если волна, указывающая вероятность положения электрона, сконцентрирована, т. е. если с значительной точностью задано положение электрона, то на основании предыдущего мы можем утверждать, что имеется размытое распределение для вероятности

скоростей. Мы получаем большую неопределенность в скорости электронов.

Если согласиться с тем, что связь между волной, с одной стороны, координатой и скоростью электрона — с другой, такая, как указывает волновая механика, то отсюда с необходимостью следует вывод: точное значение положения и точное значение скорости исключают друг друга.

Классическая механика исходила из мысли, что можно одновременно установить с любой (принципиально) точностью и *положение* и *скорость* частицы. Она учит, как движется тело, если даны x_0 и $\dot{x}_0$, в один и тот же момент времени. Волновая механика приводит к тому принципиальному результату, что электрон не может иметь одновременно точное положение и точную скорость.

Если мы приняли то определение вероятности для скорости и координаты, которое дает волновая механика, то вопрос о том, верен ли только что сформулированный результат, — вопрос чисто математический, связанный с теорией интеграла Фурье. Этого нельзя понять с двух слов. Для того, чтобы здесь все понять, нужно математическое исследование.

Позвольте на этом кончить с интегралом Фурье.

Мы узнали, что действие произвольной силы можно свести на знакомые вещи, на монохроматические колебания. Часто поступают иначе. Часто бывает гораздо правильнее задать начальные условия и решать задачу в лоб, беря силу такой, как она дана.

Не трудно убедиться подстановкой (доказательство подстановкой является совершенно строгим), что

$$x = e^{-\delta t}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) + \frac{e^{-\delta t}}{\omega} \int_{t_0}^{t} e^{\delta \xi} f(\xi) \sin \omega (t - \xi)\, d\xi, \qquad (15)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, является решением уравнения (1) при какой угодно $f(t)$. Оно применимо, например, и в том случае, если на маятник подействовал кратковременный толчок — заведомо несинусоидальная сила. Как найдено решение (15) — это другое дело (его находят методом вариации постоянных). Но это *решение*, и оно содержит две произвольные постоянные, т. е. является *общим* решением. Начальные условия удовлетворяются подбором C_1 и C_2. Последний член вместе с его производной пропадает при $t = t_0$. Как сказано, решение (15) годно „на все случаи

жизни", но в случае синусоидальной силы пользоваться им нецелесообразно.

Мы не будем дискутировать решение (15) в общем виде, а рассмотрим только тот частный случай, когда вначале $(t=t_0=0)$ осциллатор не смещен и находится в покое. При этом $C_1=C_2=0$ и

$$x=\frac{e^{-\delta t}}{\omega}\int_0^t e^{\delta\xi}f(\xi)\sin\omega(t-\xi)\,d\xi. \tag{16}$$

Пусть $f(t)$ представляет собой импульс, действующий в течение промежутка времени $(0, T)$. Пусть на протяжении всего импульса сила $f(t)$ положительна. Обработаем решение (16) так, чтобы легко было дать ответ на интересующий нас вопрос: как ведет себя осциллатор после того, как подействовал очень кратковременный импульс. Так как при $\xi>T$ имеем $f(\xi)=0$, то можно написать, вместо (16), для $t>T$:

$$x=\frac{e^{-\delta t}}{\omega}\int_0^T e^{\delta\xi}f(\xi)\sin\omega(t-\xi)\,d\xi. \tag{17}$$

По теореме о среднем, поскольку $f(\xi)>0$, имеем:

$$x=\frac{e^{-\delta t}}{\omega}e^{\delta\theta T}\sin\omega(t-\theta T)\int_0^T f(\xi)\,d\xi \qquad (0<\theta<1). \tag{18}$$

Нас интересует случай, когда длительность импульса мала по сравнению с периодом τ: $T/\tau\ll 1$, т. е. $\omega T\ll 2\pi$, и, следовательно,

$$\omega\theta T\ll 2\pi. \tag{19}$$

Обозначив

$$I=\int_0^T f(\xi)\,d\xi, \tag{20}$$

мы получаем приближенно для этого случая на основании (18)—(20):

$$x=I\frac{e^{-\delta t}}{\omega}\sin\omega t. \tag{21}$$

Посмотрим теперь, что это значит физически. I есть импульс силы. Если система такова, что продолжительность действия силы $f(t)$ мала по сравнению с периодом τ, то вид функции $f(t)$

не имеет значения; важен только импульс силы. Этот результат очень важен для построения измерительных устройств. Пусть система, обладающая определенным периодом (например, маятник), получает удар. Каково максимальное отклонение?

Из (21) получаем (если $\delta \ll \omega_0$):

$$x_{max} = \frac{I}{\omega}. \tag{22}$$

Наблюдая максимальное отклонение, можно сразу определить импульс силы. Возьмем для примера баллистический маятник (рис. 78). Пусть m — масса снаряда, M — масса маятника, причем $m \ll M$.

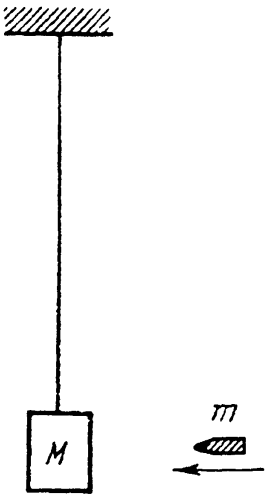


Рис. 78.

Снаряд застревает в маятнике. Тогда

$$I = mv,$$

где v — скорость снаряда.

На основании (20) и (22), вспомнив, что „сила“ $f(t)$ в уравнении (1) была в действительности сила, деленная на массу, мы получаем для максимального отклонения маятника значение

$$x_{max} = \frac{mv}{M\omega}.$$

Зная m, ω, M и измерив x_{max}, можно узнать v.

Аналогично обстоит дело в баллистическом гальванометре. Здесь вращающий момент пропорционален силе тока:

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \alpha i$$

(φ — угол отклонения; i — сила тока). При токах малой продолжительности (продолжительность тока мала по сравнению с периодом собственных колебаний) максимальное отклонение пропорционально

$$Q = \int_0^T i\,dt,$$

т. е. количеству электричества, прошедшему через прибор.

При выводе соотношения (18) мы сделали предположение, что $f(t)$ не меняет знака. Но от этого предположения можно

освободиться. Формула (18) справедлива и при знакопеременной кратковременной силе. Для того, чтобы это доказать, нужно представить знакопеременную $f(t)$ как чередование знакопостоянных сил (рис. 79).

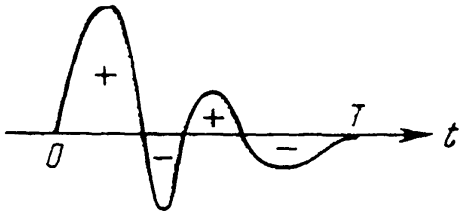


Рис. 79.

Мы рассмотрели случай кратковременной силы. Другой важный случай — тот, когда сила меняется *очень медленно*.

Что значит „очень медленное" нарастание силы? Дать точную формулировку здесь труднее, чем для кратковременной силы. Ясно одно: если бы было

$$f(t) = f_0 = \text{const},$$

то мы имели бы статическое отклонение

$$x = \frac{f_0}{\omega_0^2}.$$

Если $f(t)$ изменяется достаточно медленно, то с достаточным приближением решение будет квазистатическим, т. е. таким

$$x = \frac{f(t)}{\omega_0^2}. \tag{23}$$

Для того, чтобы это показать, преобразуем формулу (16) посредством интегрирования по частям:

$$x = \frac{e^{-\delta t}}{\omega} \int_0^t e^{\delta\xi} f(\xi) \frac{d\cos\omega(t-\xi)}{\omega} =$$

$$= \frac{f(t)}{\omega^2} - \frac{e^{-\delta t}}{\omega^2} \int_0^t [f'(\xi) + \delta f(\xi)] e^{\delta\xi} \cos\omega(t-\xi)\, d\xi$$

(здесь принято во внимание, что $f(0) = 0$). Пренебрегая затуханием, получаем:

$$x = \frac{f(t)}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega_0^2} \int_0^t f'(\xi) \cos\omega_0(t-\xi)\, d\xi.$$

Получилось статическое отклонение (23) + поправка, которая тем меньше, чем меньше $f'(t)$, т. е. чем медленнее меняется сила. Этой

поправкой можно пренебречь, если сила меняется достаточно медленно по отношению к периоду собственных колебаний.

ДВАДЦАТЬ ПЕРВАЯ ЛЕКЦИЯ

(18/I 1931 г.)

Реальность синусообразных слагаемых в интеграле Фурье. Применения гармонических резонаторов в регистрирующих приборах. „Молоточек" Н. Н. Андреева. Ток в ускоренно движущемся электрическом контуре; инерция электронов. Аналогия в вопросах колебаний.

Я хочу ответить сначала на записку. В ней поставлен разумный и интересный вопрос. Он касается физического смысла разложения в интеграл Фурье.

Когда мы разлагали

$$(1 + k\cos pt)\cos\omega t \tag{1}$$

на три синусоидальные составляющие, то на вопрос об их реальности мы отвечали следующим образом. Представление (1) и представление

$$\cos\omega t + \frac{k}{2}\cos(\omega - p)t + \frac{k}{2}\cos(\omega + p)t \tag{2}$$

это (на основании тригонометрии) — одно и то же. Каждое из трех колебаний (2) можно выделить резонатором.

Когда же мы имели дело с непериодической функцией такого типа, как на рис. 74, и разлагали ее в интеграл Фурье

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \{g_1(u)\cos ut + g_2(u)\sin ut\}\,du, \tag{3}$$

то мы тоже представляли ее в виде суммы синусоидальных колебаний, каждое из которых длится от $t = -\infty$ до $t = +\infty$. В первом случае был дискретный спектр, здесь — сплошной. Реальны ли здесь эти синусоидальные составляющие?

Возьмем наш интеграл Фурье при $t < 0$, когда заведомо $f(t) = 0$. Разумеется, там не имеет смысла говорить о существовании синусоидальных составляющих, но никакого противоречия с (3) нет.

Когда спектр дискретный, можно выделить каждую синусоидальную составляющую в отдельности. Но в случае непрерывного спектра физически можно выделить только *интервал* частот, а не отдельную частоту. Все физические средства таковы, что могут выделять из (3) только некоторые континуумы частот. А для $t<0$ *любой* такой континуум частот дает в сумме нуль.

Можно доказать, что какой бы мы ни взяли резонатор и как бы мы его ни настроили, колебание, возникающее в резонаторе, представляется таким интегралом Фурье, который равняется нулю при $t<0$, если там $f(t)=0$[1].

Резонаторы встречаются чрезвычайно часто в качестве инструментов для исследования процессов. Сюда относятся гальванометр, осциллограф, сейсмограф. Свойства этих регистрирующих аппаратов хорошо известны. Их следует строить по-разному, в зависимости от требований, которые к ним предъявляются. Какими точками зрения нужно руководствоваться при постройке таких приборов?

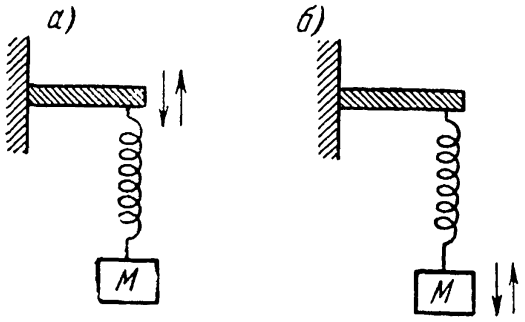


Рис. 80.

Возьмем, например, сейсмограф. При сотрясении почвы верхний конец пружины (рис. 80,*а*) качается. Можно написать уравнение движения груза в неинерциальной системе отсчета, связанной с подставкой. Здесь требуется, чтобы груз по возможности оставался в покое в инерциальной системе. Тогда изменения длины пружины будут измерять смещения почвы. Это требование приводит к тому, что собственный период системы должен быть гораздо больше периода колебаний почвы, т. е. должно быть

$$\frac{p}{\omega_0}\gg 1$$

(p — вынуждающая, ω_0 — собственная частота). Чем больше отношение p/ω_0, тем правильнее изменения длины пружины воспроизводят колебания почвы.

Совсем иначе обстоит дело в осциллографе. Здесь „подставка“ (рис. 80, *б*) находится в покое, а смещение „груза“ должно быть

[1] [См. том V, стр. 69 и след.]

подобно действующей на него силе и возможно больше по величине. Таким образом, здесь предъявляются два требования:

1) чувствительность;

2) отсутствие искажений формы силы.

Эти два требования противоречивы: если чувствительность велика, то происходят и большие искажения. Это следует прямо из тех свойств резонаторов, которые мы уже знаем. Большая чувствительность (большое отклонение под действием заданной силы) достигается при резонансе. Но если сила не чисто синусоидальная, то — вблизи резонанса на одну из ее синусоидальных составляющих — различным синусоидальным составляющим соответствует совершенно различное соотношение отклонения и силы. Смещение имеет совсем другую форму, чем сила.

Нужно искать компромисс между обоими требованиями.

Пусть мембрана (например, мембрана телефона) колеблется синусообразно с очень малой амплитудой. Как измерить эту амплитуду? Представим себе, что на мембране лежит тело массы M. Мы можем написать для него уравнение движения

$$M\ddot{x} = F + P, \tag{4}$$

где P — сила, действующая на M со стороны мембраны, F — сумма всех остальных сил (сюда входит и сила тяжести).

Зная движение мембраны, т. е. функцию $x = x(t)$ и силу F, можно из уравнения (4) вычислить величину P. Предположим сначала, что масса M припаяна к мембране. Если из уравнения (4) получится $P < 0$, это будет означать, что спай тянет массу M. Пусть теперь M не припаяна, а просто лежит на мембране. Теперь, если уравнение (4) дает $P < 0$, это будет означать, что масса отрывается от мембраны.

Найдем, при каких условиях это произойдет.

Пусть F — только сила тяжести. Тогда

$$M\ddot{x} = -Mg + P.$$

Мембрана движется по закону

$$x = a \sin \omega t, \tag{5}$$

и, следовательно,

$$P = -Ma\omega^2 \sin \omega t + Mg.$$

Грузик оторвется от мембраны (P будет принимать отрицательные значения), если

$$Ma\omega^2 \geqslant Mg,$$

т. е. ускорение мембраны начнет превышать ускорение тяжести. При этом амплитуда смещения

$$a \geqslant \frac{g}{\omega^2}. \tag{6}$$

Будем постепенно увеличивать амплитуду колебаний мембраны. Пока она мала, грузик будет двигаться вместе с мембраной. Когда амплитуда возрастет настолько, что будет выполнено условие (6), масса начнет подпрыгивать. Если на телефонной мембране лежит шарик, то при малых токах все будет спокойно, но при увеличении тока в определенный момент начинается дребезжание. Определив момент начала дребезжания, можно, зная ω, вычислить a. Например, при $\omega = 2\pi \cdot 200$ сек$^{-1}$ дребезжание начнется при

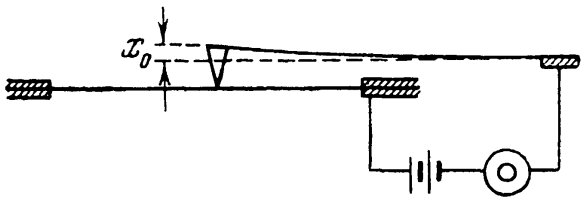


Рис. 81.

$$a = \frac{981}{4\pi^2 \cdot 4 \cdot 10^4} \approx 0{,}006 \text{ мм}.$$

Получается очень чувствительный метод измерения амплитуды. На это обратил внимание Брэгг[1]. Н. Н. Андреев[2] использовал только что разобранное явление для построения измерительного прибора — „молоточка".

Пусть, когда мембрана покоится (рис. 81), молоточек отклонен ею на расстояние x_0 от своего положения равновесия, которое он занимал бы в отсутствие мембраны. При колебаниях мембраны имеем

$$M\ddot{x} = -k(x_0 + x) + P,$$

где k — упругость пружины молоточка, x — смещение мембраны. Подставляя сюда (5), получаем следующее значение амплитуды, при которой начинается дребезжание (т. е. P начинает принимать отрицательные значения):

$$a = \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} x_0, \tag{7}$$

[1] [Engineering, 1918.]

[2] [Н. Н. Андреев. Журн. прикл. физ., 2, 205, 1925.]

где

$$\omega_0^2 = \frac{k}{M}$$

— собственная частота молоточка. Если

$$\omega_0^2 \ll \omega^2$$

(язычок с большим собственным периодом), то вместо (7) можно написать приближенно

$$a = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} x_0.$$

Изменяя x_0 с помощью микрометрического винта и замечая начало дребезжания, можно отсюда найти a. Таким образом можно измерять амплитуды механических колебаний. Для того, чтобы прибор был возможно более чувствительным, нужно, чтобы отношение ω_0/ω было возможно меньше. Начало дребезжания (отрыва молоточка от мембраны) можно услышать в телефон (рис. 81). В этот момент начинается прерывание контакта.

Сделав $\omega_0/\omega = 0{,}01$, получаем в момент отрыва $a = 10^{-4} x_0$. Если отрыв наступает при $x_0 = 1$ мм, то $a = 10^{-4}$ мм. Получается чрезвычайно чувствительный прибор. Для амплитуд порядка 10^{-4} мм теория еще хороша, но дальше начинаются неприятности. Теория предполагает, что молоточек просто лежит на мембране, не приставая к ней. В действительности он к ней как бы „чуть-чуть припаян".

Что здесь поучительно? Большая чувствительность достигается благодаря тому, что при колебательных процессах ускорение чрезвычайно быстро растет с частотой (если амплитуда смещения задана). Из (5) имеем:

$$\ddot{x}_{\text{ma}} = \omega^2 a.$$

При больших частотах это ведет к колоссальным ускорениям, даже при ничтожных смещениях.

Например, пьезокварцевая пластинка колеблется с амплитудой смещения всего лишь 10^{-6} см, но с частотой 10^6 сек$^{-1}$. Получается максимальное ускорение

$$\ddot{x}_{\max} = 4\pi^2 10^{12} \cdot 10^{-6} \approx 4 \cdot 10^4 g.$$

Положим массу M на поперечно колеблющийся пьезокварцевый стержень (рис. 82). Что будет с собственным периодом?

Казалось бы, колебания должны замедляться и собственный период должен увеличиваться. В действительности может оказаться, что M совершенно не повлияет на период, потому что при том ускорении, которое имеет пьезокварц, она остается на месте. Пусть $M=0{,}1$ г. При $a=10^{-6}$ см, $\nu=10^6$ сек$^{-1}$ для того, чтобы ее увлечь, нужна сила

$$M\ddot{x}_{\max}=M\cdot 4\cdot 10^4 g=0{,}1\cdot 4\cdot 10^4\cdot 10^3\approx 4 \text{ кг}.$$

При $M=1$ г нужна была бы сила в 400 кг. Это — колоссальные силы, и для того, чтобы их создать, силы трения не хватает. Практически масса остается в покое, и ее присутствие не влияет на собственную частоту; оно только увеличивает затухание.

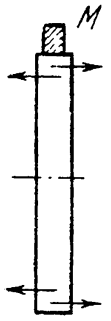


Рис. 82.

Благодаря огромным ускорениям, можно получать при механических колебаниях высокой частоты „феноменальные" явления. Этот вопрос еще мало разработан.

Часто возникает такой вопрос: как движется маятник, если движется его точка подвеса (например, вместе с Землей)? Механика учит, как решать такие вопросы. Здесь нет никаких принципиальных трудностей.

Можно поставить аналогичный вопрос для электрических систем. Как ведут себя электрические системы, если они находятся в движении? На этот вопрос ответить не так просто. Механика не переносится сюда непосредственно.

Рассмотрим, например, электрическую цепь, движущуюся ускоренно (рис. 83). Как написать для этого случая уравнение для тока?

Начнем с обычного уравнения для тока

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=0 \tag{8}$$

и постараемся обосновать это уравнение. Ток в проводнике есть движение заряженных частиц — электронов. Пусть N — число электронов на единицу длины провода, $\dot{x}$ — средняя скорость их упорядоченного движения. Тогда

$$Ne\dot{x}=i, \tag{9}$$

где e — абсолютное значение заряда электрона. Что представляет собой с этой точки зрения индуктивность L? Казалось бы, это не что иное, как масса электронов, т. е. L получается вследствие

инерции электронов. Но это не так. Если бы это было так, то задача о токе была бы механической задачей о движении электронов. Дело в том, что L не определяется суммой масс электронов и в этом заключается глубокое отличие от механики, где общая масса системы есть сумма масс составляющих ее частиц:

$$M = \sum_i m_i.$$

В электродинамике кинетическая энергия — это магнитная энергия движущихся электронов. Магнитная энергия есть квадратичная функция от напряженности поля. Поля отдельных электронов суммируются, но отнюдь не энергии: помимо членов, определяемых отдельными электронами, в выражении для энергии имеются еще члены взаимодействия. Индуктивность контура обусловлена именно этой *взаимной* магнитной энергией, намного превышающей сумму масс всех электронов. Но вернемся к вопросу об уравнении для тока в ускоренно движущейся цепи.

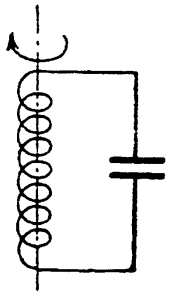


Рис. 83.

Электроны имеют собственные массы. Будем считать, что скорости электронов малы, так что можно пренебречь релятивистским эффектом изменения массы со скоростью. В таком случае можно написать для электрона уравнение движения

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} + eE, \tag{10}$$

где E — напряженность электрического поля, а $-\alpha\dot{x}$ — некоторая сила, аналогичная трению. Разные теории объясняют эту силу по-разному, но мы не будем входить в объяснение этой силы, а заметим лишь, как связано α с макроскопическими величинами. Макроскопический ток связан с полем законом Ома

$$i = \frac{E}{\rho},$$

где ρ — сопротивление линейного проводника. Пользуясь (9), получаем:

$$\dot{x} = \frac{E}{Ne\rho}. \tag{11}$$

Пусть течет постоянный ток. Тогда из (10) имеем:

$$\alpha\dot{x} = eE. \tag{12}$$

На основании (11) и (12) получаем:

$$\alpha = Ne^2\rho. \tag{13}$$

Для вычисления среднего поля E поступают следующим образом. Применим к контуру (рис. 84)· уравнения Максвелла. Мы исходим из уравнения Максвелла

$$\oint E_s ds = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}. \tag{14}$$

Интеграл в левой части мы разбиваем на два:

$$\oint E_s ds = \int\limits_{bda} E_s ds + \int\limits_{acb} E_s ds.$$

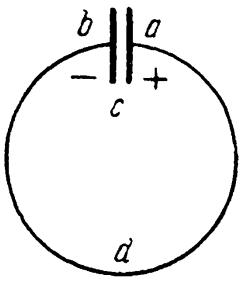


Рис. 84.

Если ток квазистационарный, то первый интеграл справа равен sE, где s — длина провода. По определению второй интеграл справа есть разность потенциалов Q/C между обкладками конденсатора. Итак,

$$\oint E_s ds = sE + \frac{Q}{C}. \tag{15}$$

Комбинируя соотношения (14) и (15), получаем:

$$E = -\frac{1}{s}\left(L\frac{di}{dt} + \frac{Q}{C}\right). \tag{16}$$

Однако в этом выводе допущена грубейшая принципиальная ошибка. Что такое разность потенциалов в электростатике? Это

$$P = \int\limits_A^B E_s ds.$$

Определение имеет смысл только тогда, когда интеграл не зависит от пути между точками A и B, т. е., что равносильно, когда

$$\oint E_s ds = 0. \tag{17}$$

В нашем случае условие (17) заведомо не выполняется, так как имеет место соотношение (14), причем

$$L\frac{di}{dt} \neq 0.$$

Таким образом, в нашем случае понятие разности потенциалов не имеет смысла.

Какой же смысл имеет наш вывод уравнения (16)? Хотя интеграл $\int E_s ds$ зависит от пути, мы можем принять, что *внутри* конденсатора (мы говорим *специально* о таком пути, который проходит внутри конденсатора) поле примерно такое же, какое было бы в электростатическом случае, если конденсатор имеет заряд Q. Только с этой оговоркой можно здесь говорить с достаточным приближением о разности потенциалов, несмотря на то, что в подобного рода явлениях понятие разности потенциалов в принципе неправильно.

Из уравнений (10), (13) и (16) следует:

$$\frac{sm}{e}\ddot{x} + sNe\rho\dot{x} + \left(L\frac{di}{dt} + \frac{Q}{C}\right) = 0. \tag{18}$$

Если можно считать m бесконечно малым, то отсюда сразу получается обычное уравнение (8). Однако, как мы видим, уравнение (8) не вполне отвечает тому, что происходит в цепи. В полном уравнении (18) есть еще один член с $\frac{di}{dt}$, которым обычно пренебрегают. Это возможно именно потому, что взаимная масса электронов намного превышает сумму масс отдельно взятых электронов.

Мы хотим теперь написать уравнение в неинерциальной системе отсчета. Нас интересует только тангенциальная составляющая движения электронов. Нужно добавить в уравнение движения (18) тангенциальную силу инерции $(-m\ddot{\xi})$, где ξ — путь, пройденный точками колебательного контура, а x — путь, пройденный электронами в системе координат, жестко связанной с контуром. Сила трения зависит от относительной скорости $\dot{x}$. Выражая $\dot{x}$ через i с помощью соотношения (9) и учитывая, что $\rho s = R$ есть полное сопротивление, получаем вместо (18) уравнение

$$\left(\frac{sm}{Ne^2} + L\right)\frac{di}{dt} + Ri + \frac{Q}{C} = -\frac{sm}{e}\ddot{\xi}.$$

Как сказано, поправка sm/Ne^2 очень мала по сравнению с L, и мы можем написать приближенно:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{Q}{C} = -\frac{sm}{e}\ddot{\xi}. \tag{19}$$

Таким образом, в ускоренно движущемся контуре явления происходят так, как будто контур остается в покое, но зато действует электровозбудительная сила

$$-\frac{sm}{e}\ddot{\xi}. \tag{20}$$

Величина m/e очень мала:

$$\frac{m}{e}=\frac{1}{1{,}8\cdot 10^{7}}\ \text{CGSm}.$$

Какова может быть амплитуда электровозбудительной силы (20) при колебательном движении катушки? Здесь главное — частота. Пусть частота равна 200 колебаний в секунду, амплитуда — 0,5 см и пусть $s=100$ м $=10^4$ см (большая катушка). Тогда амплитуда электровозбудительной силы будет

$$\mathcal{E}=\frac{10^4\cdot 0{,}5\cdot 4\pi^2\cdot 4\cdot 10^4}{1{,}8\cdot 10^{7}}\ \text{CGSm}\approx 10^{-4}\ \text{вольта}.$$

Это вполне измеримая величина.

Опыт такого рода был сделан Толмэном и Стюартом[1]. Он был сделан не совсем так, как здесь говорилось. У них не было конденсатора ($C=\infty$) и $L\frac{di}{dt}$ было мало по сравнению с Ri. Таким образом, к этому опыту было приближенно применимо уравнение

$$Ri=-\frac{sm}{e}\ddot{\xi}.$$

Толмэн и Стюарт раскручивали катушку и внезапно ее останавливали. При этом наблюдалось появление кратковременного тока. Из опыта можно было найти отношение e/m.

Можно было бы, заморозив контур, уменьшить R и благодаря этому увеличить эффект. При очень низких температурах главную роль будет играть член $L\frac{di}{dt}$, но с помощью емкости можно для определенной частоты скомпенсировать индуктивный член и таким путем, пользуясь резонансом, получить довольно большие токи.

Я не вдаюсь в подробности, связанные с такими опытами. Для меня важно было изложить лишь относящиеся к этому кругу вопросов принципиальные соображения.

Быть может, есть случаи (при разрядах в вакууме), когда добавочная индуктивность sm/Ne^2 играет заметную роль. Это интересно было бы выяснить.

---

[1] [Опубликован в 1915 г. В 1911 г. аналогичный опыт был осуществлен Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси. См. Н. Д. Папалекси. Собрание трудов, стр. 379 и след.]

Перейду к другому вопросу.

Мы видели, что существует глубокая аналогия между электрическими и механическими колебаниями. Можно провести много других аналогий. Вот одна аналогия, на которую обратил внимание Кирхгоф.

Изогнем упругий тонкий стержень (рис. 85). Его форму можно задать уравнением вида

$$\theta = f(s) \qquad (21)$$

(θ — угол с осью абсцисс; s — длина дуги). Вид функции f характеризует кривую.

В теории упругости доказывается, что функция (21) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + n^2 \sin\theta = 0, \qquad (22)$$

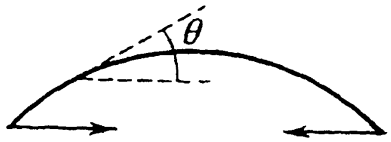


Рис. 85.

где n^2 — определенная комбинация из величин, характеризующих стержень.

Уравнение (22) аналогично уравнению колебаний маятника с большой амплитудой. Зависимость угла θ от длины дуги s такая же, как зависимость угла отклонения маятника от времени. Это — изящная и любопытная аналогия. Движение маятника в двух измерениях можно изобразить такой деформацией стержня, когда он образует кривую двойной кривизны. Самое интересное здесь то, что аналогия применима к колебаниям *большой* амплитуды.

ДВАДЦАТЬ ВТОРАЯ ЛЕКЦИЯ

(25/I 1931 г.)

Понятие о связях в механике. Связи голономные, неголономные и полуголономные. Полуголономные связи в электрических системах. Уравнения Лагранжа-Максвелла. Условие устойчивости Дирихле. Кинетическая и потенциальная энергия как квадратичные формы. Относительность рода связи.

Мы рассмотрим теперь колебания таких систем, для однозначного описания конфигурации которых недостаточно задать *одну* координату. (В случае маятника конфигурация определяется заданием *одной* координаты: угла отклонения; в случае контура с индуктивностью и емкостью — также *одной* координатой: зарядом конденсатора).

Оставив пока в стороне такие системы, как струна или антенна, имеющие бесконечное число степеней свободы[1], мы рассмотрим механические системы с конечным числом степеней свободы и их электрические аналоги — системы, состоящие из конечного числа индуктивностей и емкостей, причем сначала отвлечемся от сил трения. Мы не будем стремиться к большой общности. Все самое существенное мы выявим на системах с *двумя* степенями свободы. Мы подробно разовьем теорию для двух степеней свободы и укажем, как результаты обобщаются на любое число степеней свободы.

Пусть имеется k свободных точек. Если мы знаем силы, действующие между ними, то мы знаем и уравнения движения

$$m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

(m_i — масса; $\mathbf{w}_i$ — ускорение; $\mathbf{F}_i$ — результирующая сила).

Часто задача ставится иначе. Имеется k точек, но со связями. Представим себе, например, маятник на жестком стержне. Он может двигаться в трех измерениях x, y, z. Маятник испытывает действие силы тяжести, а также сил со стороны стержня. Если бы мы знали все силы, то могли бы вычислить движение. Силы, действующей со стороны стержня, мы не знаем, но нам заранее известно, что при малейшем изменении длины стержня эта сила чрезвычайно возрастает. Поэтому можно считать, что длина стержня неизменна, т. е. что движение маятника происходит по кругу с центром в точке O.

Таким образом, тело движется в плоскости x, y, на него действует сила тяжести, и, кроме того, известно, что

$$x^2 + y^2 = l^2.$$

Требуется найти движение. Это — несколько другая постановка задачи, чем для системы свободных точек. Мы знаем только часть сил. Остальные силы неизвестны, но известно, что они налагают некоторые ограничения на координаты. Достаточно знать изменение одной из координат x или y, чтобы знать все движение.

Возьмем более общий случай. Имеется k точек и m функциональных соотношений между их координатами. Тогда имеются $n = 3k - m$ неизвестных величин, которые вполне определяют

---

[1] [См. часть II.]

движение. Число *независимых* координат, необходимое и достаточное для однозначного определения положения системы, называется числом степеней свободы системы.

Рассмотрим два маятника в плоскости, соединенных так, как показано на рис. 86. Между координатами x_1, y_1, x_2, y_2 обоих маятников имеется два соотношения:

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2;$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2.$$

Это — система с двумя степенями свободы.

Пусть система имеет n степеней свободы. Если мы знаем, как n ее *независимых* координат меняются в зависимости от времени, то мы полностью знаем движение системы.

Для этих n координат можно составить уравнения, которые „ничего не знают“ об остальных координатах. Это — уравнения Лагранжа (иногда говорят — уравнения Лагранжа второго рода; иногда, имея в виду не только механические, но и электрические и электромеханические системы, — уравнения Лагранжа-Максвелла).

Такие системы, для которых при наличии связей могут быть определены n независимых величин (связи выражаются при этом соотношениями между координатами), называются *голономными* системами. Сами эти величины называются обобщенными координатами.

Обобщенные координаты, полностью характеризующие конфигурацию системы, можно выбрать различным образом. При этом одни обобщенные координаты являются функциями от других обобщенных координат. Для того, чтобы написать уравнение движения, нужно выбрать какие-нибудь n независимых обобщенных координат.

Голономные системы характеризуются тем, что связи выражаются уравнениями между самими координатами. Так обстоит дело, например, если точка находится на поверхности:

$$f(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Могут быть другого рода связи — связи неголономные, которые выражаются уравнениями вида

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0. \tag{2}$$

Этот случай существенно отличен от предыдущего. Здесь, вообще говоря, нельзя исключить одну из координат. Особенно важен случай, когда уравнения вида (2) линейны по отношению к скоростям.

Самый простой пример связи вида (2) — повозка с двумя колесами (скат). Положение системы определяют азимут θ и координаты середины x и y. Не существует определенного соотношения между x, y и θ. Пусть скат движется по абсолютно шероховатой поверхности. Тогда движение в каждый данный момент перпен-

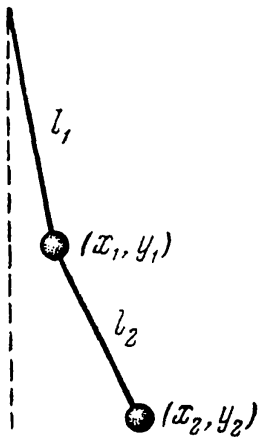


Рис. 86.

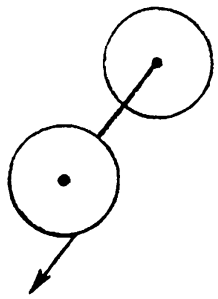


Рис. 87.

дикулярно к оси. В направлении стрелки (рис. 87) скат двигаться не может; он может только катиться. Это условие отсутствия скольжения выражается уравнением

$$dy - \operatorname{tg}\theta\, dx = 0.$$

Здесь исключение одной из координат x, y, θ невозможно. Уравнения движения систем с неголономными связями совершенно другие, чем для голономных систем.

В теории колебаний задачи только что рассмотренного типа нас не интересуют. Но есть промежуточный случай, который представляет большой интерес для теории колебаний. Пусть связь выражается уравнением вида

$$A dx + B dy + C dz = 0 \tag{3}$$

(A, B, C — функции x, y, z. Для простоты записи мы ограничимся тремя координатами). Это так называемое уравнение Пфаффа. Левая часть может иметь, но может и не иметь (если число переменных больше двух) интегрирующий множитель. Для ската левая

часть заведомо не имеет интегрирующего множителя. Условие существования интегрирующего множителя может быть записано так:

$$\mathbf{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=0,$$

где $\mathbf{E}$ — вектор с компонентами A, B, C.

Пусть левая часть уравнения (3) имеет интегрирующий множитель, т. е. превращается по умножении на некоторую функцию в полный дифференциал некоторой функции F. Тогда уравнение связи интегрируемо и дает

$$F(x, y, z)=\mathrm{const}. \tag{4}$$

Мы получаем зависимость между координатами. В случае голономной связи уравнение между координатами задано, оно не содержит произвольных постоянных. Если связь выражается соотношением вида (4), где правая часть — произвольная постоянная, то мы будем называть систему *полуголономной* (или семиголономной).

Неголономные системы — такие, где связи выражаются неинтегрируемыми уравнениями между дифференциалами координат. Полуголономные системы — такие, где связи выражаются интегрируемыми уравнениями между дифференциалами. Такие системы сходны с голономными, но в них имеется по одной лишней произвольной постоянной на каждое уравнение связи вида (4).

Поясним на самом простом примере, что такое полуголономная система.

Начнем с простого контура с самоиндукцией и конденсатором (рис. 88, *а*). Это система с одной степенью свободы. Здесь две произвольные постоянные: начальный заряд и начальный ток. Рассмотрим теперь контур с двумя последовательно соединенными конденсаторами (рис. 88, *б*). Всякий скажет: здесь тоже одна степень свободы, причем контур содержит емкость C, такую, что

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}.$$

Казалось бы, этот случай не отличается от первого.

Однако он отличается от первого случая: можно один конденсатор зарядить, а другой нет. Заряды конденсаторов не вполне зависимы, но *ток* через оба конденсатора — один и тот же, так как нет накопления электричества на соединительном проводнике:

$$\dot{Q}_1=\dot{Q}_2.$$

Вот какова здесь связь. Она накладывается на производные от координат Q_1 и Q_2 или на их дифференциалы:

$$dQ_1 = dQ_2.$$

Эту связь можно сразу проинтегрировать:

$$Q_1 - Q_2 = \text{const}.$$

Здесь можно выразить Q_1 через Q_2, и тогда получится одна степень свободы, но зато появляется произвольная постоянная. Любое ее значение не противоречит связи.

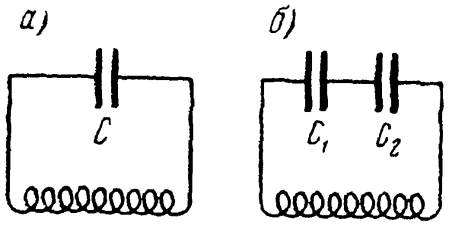


Рис. 88.

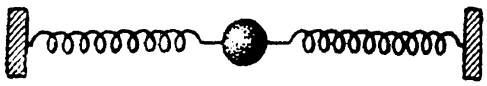


Рис. 89.

Можно подойти к полуголономным системам и с другой стороны. Рассмотрим чисто голономную систему

$$f(x, y, z) = \text{const}$$

и будем давать константе различные значении $A_1, A_2, \ldots$, т. е. будем рассматривать *различные* чисто голономные системы. Можно считать, что у нас *одна* система, но с лишней произвольной постоянной, т. е. полуголономная система.

В системе, показанной на рис. 89, если точки закрепления пружин передвижные, получается лишняя произвольная постоянная.

Остановимся на голономных системах. Самыми удобными уравнениями движения для них являются уравнения Лагранжа. Они дают то и только то, что нужно. Они справедливы для любых координат. Они одинаковы как для механических, так и для электрических систем. Выводить их здесь я не могу, а скажу только, как они пишутся и что они утверждают.

Пусть имеется n обобщенных координат:

$$q_1, q_2, \ldots, q_n.$$

Можно выразить через них декартовы координаты. Через обобщенные координаты и n обобщенных скоростей:

$$\dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_n$$

можно выразить декартовы компоненты обычных скоростей.

Так как радиусы-векторы $\mathbf{r}_\mu$ отдельных точек — функции обобщенных координат:

$$\mathbf{r}_\mu=\mathbf{f}_\mu(q_1,\ q_2,\ldots q_n),$$

то скорости

$$\dot{\mathbf{r}}_\mu=\sum_\lambda \frac{\partial \mathbf{f}_\mu}{\partial q_\lambda}\dot{q}_\lambda,$$

и, следовательно, выражение кинетической энергии через обобщенные координаты и скорости имеет вид

$$T=\frac{1}{2}\sum_\mu m_\mu \dot{r}_\mu^2=\sum_{i,\,k}\alpha_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k. \tag{5}$$

Таким образом, кинетическая энергия — квадратичная функция обобщенных скоростей, в которой коэффициенты — функции обобщенных координат.

Элементарная работа сил выражается суммой членов вида

$$Q_\lambda \delta q_\lambda,$$

где Q_λ — обобщенная сила. Выражение Q_λ называется обобщенной *силой* по аналогии с тем, что имеет место в декартовых координатах, где работа определяется как произведение $X\delta x$ (X — сила, δx — перемещение).

Рассмотрим, например, тело, вращающееся вокруг оси. Здесь работа при повороте на угол $\delta\theta$ есть $M\delta\theta$, где M — момент „обычной“ силы. В данном случае обобщенной силой является момент „обычной“ силы. (Обобщенная сила может иметь другую размерность, чем обычная сила.)

Для того, чтобы найти, как изменяются со временем обобщенные координаты, нужно составить и решить уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\lambda}=Q_\lambda \qquad (\lambda=1,\ 2,\ldots,\ n). \tag{6}$$

Это и есть уравнения движения в форме Лагранжа.

Может случиться, что обобщенные силы Q_λ — такие функции только от q_λ, что

$$Q_\lambda = -\frac{\partial U(q_1, q_2, \ldots, q_n)}{\partial q_\lambda}.$$

Функция $U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ есть не что иное, как потенциальная энергия, выраженная через обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$. В этом случае, т. е. при потенциальных силах Q_λ, уравнения движения принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\lambda} + \frac{\partial U}{\partial q_\lambda} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Эти уравнения справедливы и для электрических цепей, если считать, что U — электрическая, а T — магнитная энергия, q_λ — заряды, $\dot{q}_\lambda$ — токи. Из уравнений Лагранжа получаются все законы колебаний механических, электрических и смешанных систем. Эти уравнения очень общи.

Нас будут интересовать специально *линейные* колебательные системы (нелинейные системы гораздо сложнее). Для линейных механических и электрических колебательных систем функции T и U имеют один и тот же вид и получаются одинаковые уравнения движения.

Перейдем к исследованию устойчивости равновесия.

Устойчивым состоянием равновесия называется такое состояние равновесия, что если систему вывести из него, и притом так, что изменения координат, а также скорости, достаточно малы, то они будут оставаться сколь угодно малыми в течение любого времени.

Дирихле доказал, что достаточное условие устойчивости равновесия заключается в том, что в состоянии равновесия должно быть

$$U(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \text{minimum},$$

т. е. если в положении равновесия потенциальная энергия имеет минимум, то равновесие устойчиво. Докажем это утверждение (необходимые условия равновесия мы затрагивать не будем).

Если мы прибавим к U постоянную величину, уравнения движения не изменятся. Мы можем поэтому считать, что минимум U соответствует $U = 0$. Тогда при малом отклонении от равновесия $U > 0$. Так как справедлив закон сохранения энергии, то $T + U = \text{const}$, причем и $T > 0$. Следовательно, если мы дадим системе

достаточно малое начальное отклонение, при котором $T_0 + U_0 < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), то и в дальнейшем

$$T + U < \varepsilon,$$

т. е. значения координат и скоростей не выйдут за известные пределы и, следовательно, равновесие устойчивое.

Одно маленькое замечание: из того, что кинетическая энергия всегда остается меньше ε, мы заключаем, что ни одна точка системы не может получить большой скорости. При этом мы рассуждаем так: если T достаточно мала, то каждый ее член $m_i v_i^2/2$ тоже достаточно мал:

$$\frac{m_i v_i^2}{2} < \varepsilon.$$

Тогда и $|v_i|$ меньше некоторой заданной величины. Но это рассуждение годится только для систем, состоящих из конечного числа точек, каждая из которых имеет конечную массу. Если наша система — континуум, то может случиться, что входящая в ее состав очень маленькая масса, несмотря на то, что $T < \varepsilon$, получит очень большую скорость. Пусть, например, поверхность воды находится в равновесии. Для того, чтобы быть уверенным, что равновесие устойчиво, нужно доказать, что при $T < \varepsilon$ сколь угодно маленькая капля не получит сколь угодно большой скорости.

Рассмотрим движение системы вблизи положения равновесия:

$$q_1 = q_1^0,\ q_2 = q_2^0, \ldots,\ q_n = q_n^0.$$

Введем новые координаты:

$$q_1' = q_1 - q_1^0,\ q_2' = q_2 - q_2^0, \ldots,\ q_n' = q_n - q_n^0.$$

При дифференцировании по времени q_λ^0 выпадают, так что

$$\dot{q}_1' = \dot{q}_1,\ \dot{q}_2' = \dot{q}_2, \ldots,\ \dot{q}_n' = \dot{q}_n.$$

Изменив таким образом начало координат, мы имеем в положении равновесия:

$$q_1' = 0,\ q_2' = 0, \ldots,\ q_n' = 0,$$

и в новых координатах

$$U(0,\ 0, \ldots, 0) = \text{minimum}.$$

Разложим U в степенной ряд около положения равновесия. Опуская штрихи в обозначении новых координат, имеем:

$$U(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \sum_i \frac{\partial U}{\partial q_i} q_i + \sum_{i,k} b_{ik} q_i q_k + \ldots$$

Так как в положении равновесия U минимум, то все $\partial U/\partial q_i$ равны нулю. Ограничимся здесь очень малыми отклонениями. Тогда кубические члены малы по сравнению с квадратичными, и в первом приближении их можно отбросить. Для двух степеней свободы можно считать, что

$$U = b_{11} q_1^2 + 2b_{12} q_1 q_2 + b_{22} q_2^2. \tag{8}$$

Перейдем к кинетической энергии (5). Разложим функцию α_{ik} в степенной ряд по q_λ:

$$\alpha_{ik} = a_{ik} + \sum_l \beta_{ikl} q_l + \ldots$$

Отбросив и здесь все члены, кроме первого, получаем в случае двух степеней свободы следующее выражение для T:

$$T = a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2. \tag{9}$$

Из выражений (8) и (9) мы получим в качестве уравнений Лагранжа два совокупных линейных дифференциальных уравнения для q_1 и q_2.

В задачах, которые мы будем рассматривать, электростатическая энергия есть квадратичная функция с постоянными коэффициентами от зарядов. Коэффициенты определяются емкостями C. Магнитная энергия — квадратичная функция токов, т. е. производных от зарядов. В ней коэффициенты определяются индуктивностями L. Величины C и L не зависят от зарядов и токов. Таким образом, вид формул (8) и (9) для всех рассматриваемых задач одинаков. Мы применим их к частным случаям и на них выявим свойства изучаемых систем. (Нагляднее всего исходить из конкретных физических примеров.)

Мы рассмотрим сегодня два простых примера.

Первый пример: балка на двух пружинах (рис. 90). Этот пример и практически интересен, так как представляет собой простую модель вагона на двух рессорах. Нужно выбрать координаты, однозначно определяющие конфигурацию системы. Пусть ξ — координата центра тяжести P, x_1 и x_2 — координаты концов,

θ — угол поворота балки. Между этими четырьмя координатами имеются два соотношения (угол θ по предположению мал):

$$x_1 = \xi - l_1\theta,$$

$$x_2 = \xi + l_2\theta.$$

Какие координаты здесь „естественные"? Физически все они равноправны. Но вопрос о „естественности" тех или иных координат играл когда-то очень большую роль.

Сначала мы напишем выражение кинетической энергии в одной системе координат, а выражение потенциальной — в другой. Пусть k_1 и k_2 — коэффициенты упругости пружин. Тогда потенциальная энергия

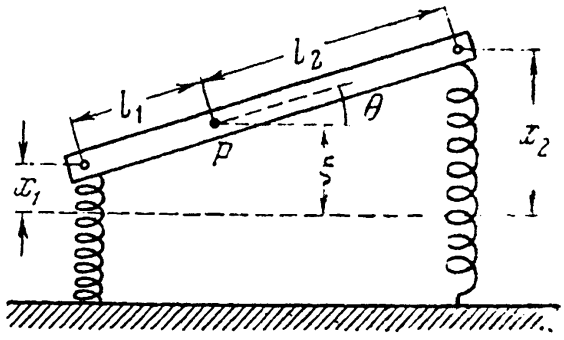


Рис. 90.

$$U = \frac{k_1 x_1^2}{2} + \frac{k_2 x_2^2}{2}.$$

По теореме Кёнига можно складывать кинетические энергии поступательного и вращательного движений, и, следовательно,

$$T = \frac{M\dot{\xi}^2}{2} + \frac{I\dot{\theta}^2}{2}$$

(M — масса балки; I — ее момент инерции).

Почему мы написали потенциальную энергию в одних, а кинетическую энергию в других координатах? Потому что при этом в обоих выражениях нет произведений координат или скоростей. Но выразим ξ и θ через x_1 и x_2. При этом в выражение кинетической энергии войдет, кроме суммы квадратов, также и произведение скоростей. Наоборот, если перейти к ξ и θ, то кинетическая энергия будет суммой квадратов, а потенциальная энергия будет содержать член с произведением координат.

Если потенциальная энергия содержит произведение координат, то говорят, что имеется *силовая* связь (в механическом случае) или ёмкостная связь (в электрическом случае). Если кинетическая энергия содержит произведение скоростей, то говорят: система связана *инерциально* (в механическом случае) или индуктивно (в электрическом случае). Если и в U, и в T есть члены с произведениями, то связь смешанная.

Вот второй пример (рис. 91). Здесь

$$U=\frac{q_1^2}{2C_1}+\frac{q_2^2}{2C_2},\qquad T=\frac{L_1\dot{q}_1^2}{2}+\frac{L_2\dot{q}_2^2}{2}+M\dot{q}_1\dot{q}_2.$$

Какова здесь связь? Емкостная или индуктивная?

На это следует ответить так: определение инерциальной (индуктивной) и силовой (емкостной) связи, в сущности, условно. Введем координаты:

$$q_1'=q_1+q_2,\ q_2'=q_1-q_2.$$

Тогда в выражении для U появится член с произведением координат, т. е. будет иметь место емкостная связь. Можно возразить, что введение координат q_1' и q_2' — математическое ухищрение. Здесь „естественно“ сказать, что связь — индуктивная. Но в нашем механическом примере трудно сказать, что естественнее: взять за координаты ξ и θ (тогда связь силовая) или x_1 и x_2 (тогда связь инерциальная).

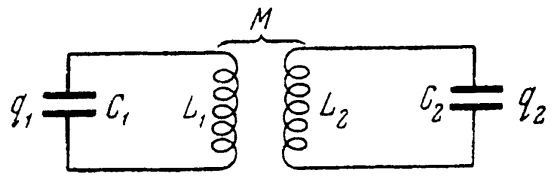


Рис. 91.

Таким образом, тип связи зависит от выбора обобщенных координат. Говоря о том или ином типе связи, нужно соблюдать известную осторожность. Может быть правильнее всего было бы говорить о типе связи по отношению к данным координатам.

ДВАДЦАТЬ ТРЕТЬЯ ЛЕКЦИЯ

(28/I 1931 г.)

Математическая теория линейной консервативной системы с двумя степенями свободы. Нормальные колебания. Секулярное уравнение. Связь между парциальными и нормальными частотами. Нормальные координаты. Общее решение как суперпозиция нормальных колебаний.

Рассмотрим общий случай малых колебаний консервативной системы с двумя степенями свободы около устойчивого положения равновесия. Потенциальная и кинетическая энергия — квадратичные формы соответственно от координат и скоростей:

$$\left.\begin{aligned} U&=ax^2+2hxy+by^2;\\ T&=A\dot{x}^2+2H\dot{x}\dot{y}+B\dot{y}^2. \end{aligned}\right\}\qquad (1)$$

Обе квадратичные формы положительно дефинитны. При этом

$$\left.\begin{aligned} A>0,\ B>0,\ AB-H^2>0,\\ a>0,\ b>0,\ ab-h^2>0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Подставляя (1) и (2) в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)+\frac{\partial U}{\partial x}=0,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)+\frac{\partial U}{\partial y}=0,$$

получаем для нашей системы уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned} A\ddot{x}+H\ddot{y}+ax+hy=0,\\ H\ddot{x}+B\ddot{y}+hx+by=0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

На рис. 92, *а*, *б* показаны два примера систем с двумя степенями свободы. В качестве x и y можно взять заряды на любых двух конденсаторах (рис. 92, *а*) и углы отклонения маятников (рис. 92, *б*) или любые линейные комбинации этих величин.

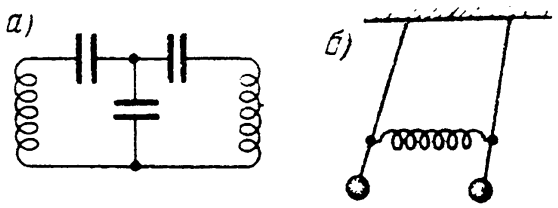


Рис. 92.

Можно ввести понятие *парциальных систем*[1]. Мы будем называть парциальными те системы с одной степенью свободы, которые получаются из данной системы с двумя степенями свободы при „закреплении" одной из координат, т. е. в случае рис. 92, *а* — при разрыве цепи, к которой относится соответственно координата x или y, а в случае рис. 92, *б* — при закреплении того или другого маятника. Математически это означает следующее. Одну парциальную систему мы получим, положив, что в (1) $x=0$ (тождественно по t), другую — положив аналогичным образом в (1) $y=0$.

Для первой парциальной системы имеем:

$$T=A\dot{x}^2,\quad U=ax^2.$$

Эта система имеет собственную частоту n_1 (парциальную частоту), такую, что

$$n_1^2=\frac{a}{A}.$$

[1] [Подробнее см. 24-ую лекцию.]

Для второй парциальной системы имеем:

$$T = B\dot{y}^2, \quad U = by^2,$$

$$n_2^2 = \frac{b}{B}$$

(n_2 — вторая парциальная частота).

Будем искать решение уравнения (3) системы с двумя степенями свободы в таком виде:

$$\begin{aligned} x &= C\cos(\omega t + \alpha), \\ y &= kC\cos(\omega t + \alpha), \end{aligned} \tag{4}$$

где C, k, ω, α — постоянные. Движение типа (4) мы будем называть *нормальным* колебанием, его частоту ω — *нормальной частотой*.

Подставляя (4) в (3) и сокращая на общий множитель $\cos(\omega t + \alpha)$, получаем систему алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} (\omega^2 A - a) + (\omega^2 H - h)k &= 0, \\ (\omega^2 H - h) + (\omega^2 B - b)k &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Рассматривая эти уравнения как систему двух линейных уравнений относительно неизвестной k, напишем условие их совместности:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 A - a & \omega^2 H - h \\ \omega^2 H - h & \omega^2 B - b \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Это — уравнение, определяющее неизвестную величину ω^2. Оно называется секулярным уравнением. Обозначим

$$\omega^2 = \xi$$

и запишем секулярное уравнение в таком виде:

$$F(\xi) = 0,$$

где $F(\xi)$ — полином второй степени:

$$F(\xi) = \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \xi + \lambda_3. \tag{7}$$

Уравнение

$$\eta = F(\xi)$$

есть уравнение параболы. Абсциссы точек, в которых она пересекает ось ξ, равны корням уравнения (6), т. е. квадратам частот искомых колебаний вида (4).

Развертывая детерминант уравнения (6) и сравнивая с (7), мы видим, что

$$\lambda_1 = AB - H^2, \quad \lambda_2 = 2hH - aB - bA, \quad \lambda_3 = ab - h^2.$$

На основании (2)

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_3 > 0.$$

При большом ξ знак η совпадает со знаком члена $\lambda_1\xi^2$, и, следовательно, η положительно. При $\xi = 0$ имеем

$$\eta = F(0) = \lambda_3,$$

и, следовательно, η здесь также положительно.

Подставляя в (7) значения ξ:

$$\xi = n_1^2 = \frac{a}{A}, \quad \xi = n_2^2 = \frac{b}{B},$$

получаем:

$$F\left(\frac{a}{A}\right) = -\left(H\frac{a}{A} - h\right)^2 < 0;$$

$$F\left(\frac{b}{B}\right) = -\left(H\frac{b}{B} - h\right)^2 < 0.$$

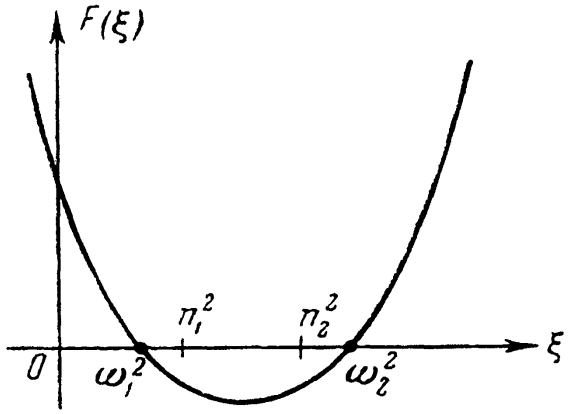


Рис. 93.

Итак, парабола пересекает ось абсцисс и имеет вид, показанный на рис. 93. Корни ω_1^2 и ω_2^2 уравнения (5) действительны и положительны, причем

$$\omega_1^2 \leqslant n_1^2 \leqslant n_2^2 \leqslant \omega_2^2.$$

Парциальные частоты лежат между нормальными частотами и — в крайнем случае — совпадают с ними.

Применим полученные результаты к случаю системы, состоящей из двух индуктивно связанных контуров (рис. 91). Здесь

$$2T = L_1\dot{q}_1^2 + L_2\dot{q}_2^2 + M\dot{q}_1\dot{q}_2,$$

$$2U = \frac{q_1^2}{C_1} + \frac{q_2^2}{C_2}.$$

Секулярное уравнение

$$\begin{vmatrix} \omega^2 L_1 - \frac{1}{C_1} & \omega^2 M \\ \omega^2 M & \omega^2 L_2 - \frac{1}{C_2} \end{vmatrix} = 0.$$

Введем парциальные частоты:

$$n_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1}, \quad n_2^2 = \frac{1}{L_2 C_2} \tag{8}$$

и обозначим

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}. \tag{9}$$

Развертывая детерминант и воспользовавшись (8) и (9), получаем:

$$\sigma\omega^4 - (n_1^2 + n_2^2)\,\omega^2 + n_1^2 n_2^2 = 0. \tag{10}$$

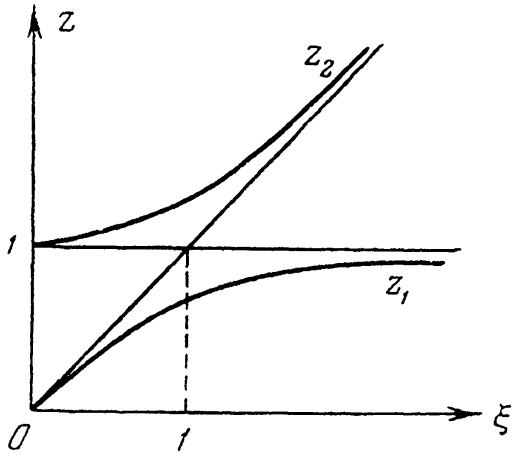


Рис. 94.

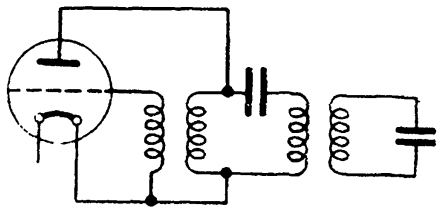


Рис. 95.

Введем еще „расстройку" парциальных частот

$$\xi = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \tag{11}$$

и величину

$$z = \frac{\omega^2}{n_1^2} \tag{12}$$

(квадрат отношения нормальной частоты к одной из парциальных). Подставляя (11) и (12) в (10), получаем

$$\sigma z^2 - (1 + \xi)\, z + \xi = 0.$$

На плоскости (z, ξ) этому уравнению соответствует семейство гипербол (каждая гипербола соответствует определенному значению параметра σ). Одна из таких гипербол изображена на рис. 94. Каждому значению расстройки ξ соответствуют две ординаты: z_1, z_2 (две нормальные частоты). Рис. 94 наглядно показывает, как нормальная частота зависит от расстройки парциальных систем.

Построенный нами график имеет большое значение при исследовании некоторых нелинейных систем, например лампового генератора, колебательный контур которого индуктивно связан с другим колебательным контуром (рис. 95). Здесь при определенных условиях происходит следующее. Имеет место периодическое

(незатухающее) колебание, частота которого практически совпадает с одной из нормальных частот той линейной консервативной системы, в которую превратилось бы устройство рис. 95 при отсутствии лампы и сопротивлений в контурах. При изменении расстройки ξ частота генерируемого колебания меняется так, как показано на рис. 96. При $\xi<\xi_1$ возможны колебания только с частотой ω_2, при $\xi>\xi_2$ — только с частотой ω_1; при $\xi_1<\xi<\xi_2$ в зависимости от истории системы происходят колебания либо с частотой ω_1, либо с частотой ω_2 (явление „затягивания" — своеобразный гистерезис). Переход от частоты ω_1 к частоте ω_2 или наоборот происходит скачком.

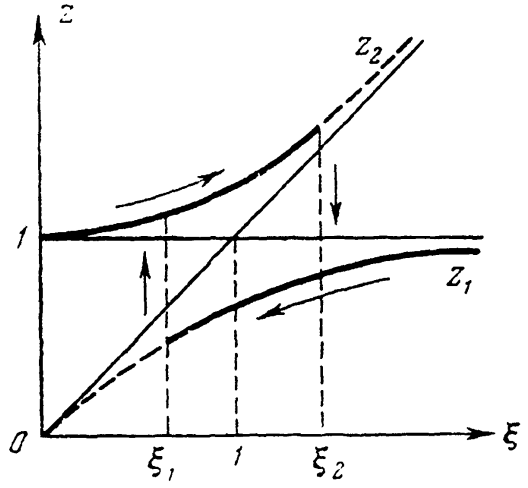


Рис. 96.

Найдя нормальные частоты, мы можем определить из (5) соответствующие значения отношения амплитуд k. Обозначим их k_1 и k_2.

Введем посредством уравнений

$$x=\xi+\eta,$$
$$y=k_1\xi+k_2\eta \qquad (13)$$

новые обобщенные координаты ξ и η. Подставив (13) в (1), получаем:

$$\left.\begin{aligned} T&=(A+2Hk_1+Bk_1^2)\dot{\xi}^2+2[A+H(k_1+k_2)+Bk_1k_2]\dot{\xi}\dot{\eta}+\\ &\quad+(A+2Hk_2+Bk_2^2)\dot{\eta}^2;\\ U&=(a+2hk_1+bk_1^2)\xi^2+2[a+h(k_1+k_2)+bk_1k_2]\xi\eta+\\ &\quad+(a+2hk_2+bk_2^2)\eta^2. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Заметим теперь, что на основании (5)

$$\omega_1^2(A+Hk_1)=a+hk_1,\quad \omega_2^2(A+Hk_2)=a+hk_2;$$

$$\omega_1^2(H+Bk_1)=h+bk_1,\quad \omega_2^2(H+Bk_2)=h+bk_2.$$

Сложим уравнения первого столбца, умножив предварительно второе на k_1:

$$\omega_1^2(A+2Hk_1+Bk_1^2)=a+2hk_1+bk_1^2. \qquad (15)$$

Сложим теперь уравнения второго столбца, умножив предварительно второе на k_2:

$$\omega_2^2(A+2Hk_2+Bk_2^2)=a+2hk_2+bk_2^2. \tag{16}$$

Если же проделать аналогичную операцию, но умножая на k_2 и k_1 вместо k_1 и k_2, то получим еще:

$$\left.\begin{aligned}\omega_1^2[A+H(k_1+k_2)+Bk_1k_2]&=a+h(k_1+k_2)+bk_1k_2;\\ \omega_2^2[A+H(k_1+k_2)+Bk_1k_2]&=a+h(k_1+k_2)+bk_1k_2.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

При $\omega_1^2\neq\omega_2^2$ из (17) следует, что

$$A+H(k_1+k_2)+Bk_1k_2=0,$$

$$a+h(k_1+k_2)+bk_1k_2=0.$$

Следовательно, выражения (14) не содержат членов с произведениями $\dot\xi\dot\eta$ и $\xi\eta$ и имеют вид

$$\left.\begin{aligned}T&=A_1\dot\xi^2+A_2\dot\eta^2,\\ U&=a_1\xi^2+a_2\eta^2,\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

причем

$$\frac{a_1}{A_1}=\omega_1^2,\quad \frac{a_2}{A_2}=\omega_2^2.$$

В системе координат $(\xi,\ \eta)$ нет ни силовой, ни инерциальной связи. Мы показали, что подходящим выбором обобщенных координат всегда можно привести обе квадратичные формы (14) к каноническому виду (18), т. е. привести их к суммам квадратов. Координаты ξ и η называются нормальными координатами.

Уравнения Лагранжа в новых обобщенных координатах

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\xi}\right)+\frac{\partial U}{\partial\xi}=0,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\eta}\right)+\frac{\partial U}{\partial\eta}=0,$$

имеют вид

$$\left.\begin{aligned}A_1\ddot\xi+a_1\xi&=0;\\ A_2\ddot\eta+a_2\eta&=0.\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

В одно из них входит только обобщенная координата ξ, в другое — только обобщенная координата η.

Уравнения (19) имеют общее решение:

$$\xi_1 = C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1), \quad \eta = C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2),$$

где ω_1 и ω_2 — нормальные частоты. Согласно (13)

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2), \\ y &= k_1 C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + k_2 C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2). \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Таково выражение общего решения в исходных координатах x, y. Мы могли бы его написать сразу (не переходя к нормальным координатам ξ и η) как сумму двух частных решений вида (4).

Сформулируем физический смысл уравнения (20).

Каждая из координат x и y совершает, вообще говоря, сумму двух гармонических колебаний с различными нормальными частотами ω_1 и ω_2.

Частоты эти задаются самой системой (видом кинетической и потенциальной энергии). Самой системой задаются также отношения k_1 и k_2 амплитуд каждого нормального колебания в обеих координатах (эти отношения могут быть как положительными, так и отрицательными). Сами амплитуды и фазы задаются начальными условиями. Каждое из гармонических колебаний имеет в обеих координатах одинаковую фазу.

ДВАДЦАТЬ ЧЕТВЕРТАЯ ЛЕКЦИЯ

(25/II 1931 г.)

Циклические координаты. Решение уравнений для линейной системы с двумя степенями свободы (без трения). Нормальные колебания, их частоты и распределения. Нормальные координаты. Нормальные частоты как экстремумы отношения двух квадратичных форм. Разделение системы на парциальные системы

Вообще говоря, интегрирование системы уравнений

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

описывающих движение системы с n степенями свободы недоступно. Но мы рассматриваем движение системы с n степенями

свободы, находящейся вблизи устойчивого состояния равновесия. При этом дифференциальные уравнения приобретают сравнительно простой вид:

$$\sum_k (b_{ik}\ddot{q}_k + a_{ik}q_k) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Это — система n линейных однородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Такая система легко интегрируется (по крайней мере в общем виде).

Теперь предпочитают работать с индексами. Для сложных систем это гораздо нагляднее. Но для случая системы с двумя степенями свободы мы воспользовались такими обозначениями:

$$a_{11} = a, \quad a_{12} = h, \quad a_{22} = b,$$

$$b_{11} = A, \quad b_{12} = H, \quad b_{22} = B,$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} 2T &= A\dot{x}^2 + 2H\dot{x}\dot{y} + B\dot{y}^2, \\ 2U &= ax^2 + 2hxy + by^2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Дифференциальные уравнения (1) записываются при этом так:

$$\left.\begin{aligned} A\ddot{x} + H\ddot{y} + ax + hy &= 0, \\ H\ddot{x} + B\ddot{y} + hx + by &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Рассмотрим тот частный случай, когда одна из координат (скажем, y) не входит в выражение потенциальной энергии (этот случай часто встречается на практике). Тогда

$$h = 0, \quad b = 0.$$

Координата, не входящая в выражение потенциальной энергии, носит название *циклической*.

Если y — циклическая координата, имеем:

$$H\ddot{x} + B\ddot{y} = 0,$$

$$\left(A - \frac{H^2}{B}\right)\ddot{x} + ax = 0.$$

Для координаты x получается такое же уравнение второго порядка, как для системы с одной степенью свободы. Существуют, таким образом, случаи двух степеней свободы, которые сводятся на одну степень свободы.

Такова, например, система рис. 97. В электрическую энергию входит только q_1, а в магнитную энергию, конечно, входит и $\dot{q}_1$ и $\dot{q}_2$. Соответствующая механическая задача: имеется вал с двумя дисками (рис. 98). Этот пример мы уже рассматривали[1]. Так можно идеализировать вал с пропеллером и мотором. Введя в качестве координат углы поворота маховика и пропеллера, мы можем свести здесь задачу на случай одной степени свободы.

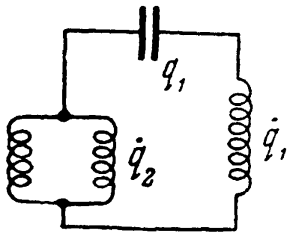


Рис. 97.

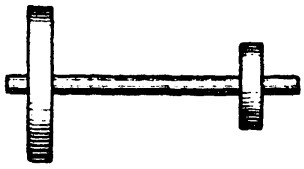


Рис. 98.

Если имеется n степеней свободы и m циклических координат, задача приводится к $n-m$ степеням свободы.

Вернемся к уравнениям (3).

Существует решение вида

$$x = C\cos(\omega t + \alpha),$$

$$y = kC\cos(\omega t + \alpha).$$

Эти выражения удовлетворяют уравнениям (2), если ω и k удовлетворяют алгебраическим уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} -(A + Hk)\omega^2 + a + hk = 0; \\ -(H + Bk)\omega^2 + h + bk = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Требуется определить из них ω и k.

Можно задать ω или k и рассматривать уравнения (4) как уравнения с одной неизвестной (k или ω). В общем случае детерминант этих уравнений не равен нулю и они не имеют решения.

Если подобрать ω так, чтобы детерминант уравнений для неизвестной k равнялся нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} \omega^2 A - a & \omega^2 H - h \\ \omega^2 H - h & \omega^2 B - b \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

то они имеют определенное решение.

[1] [См. 7-ю лекцию.]

Уравнение (5) — квадратное относительно ω^2. Квадратное уравнение может иметь разнообразные корни. Если равновесие устойчивое, то потенциальная энергия имеет минимум при $x=y=0$. Значит, квадратичные формы (2) положительны при любых x, y и $\dot{x}$, $\dot{y}$ (T всегда положительна). Математика доказывает, что при этих условиях оба корня уравнения (5) действительны и положительны.

Каждому значению ω соответствует свое значение k. Мы имеем два (положительные) значения ω ($\omega=\omega_1$, $\omega=\omega_2$) и два значения k ($k=k_1$, $k=k_2$), т. е. имеем, таким образом, два частных решения системы (3):

$$x=C_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1),$$

$$y=k_1C_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1)$$

и

$$x=C_2\cos(\omega_2 t+\alpha_2),$$

$$y=k_2C_2\cos(\omega_2 t+\alpha_2).$$

Сумма их

$$\left.\begin{aligned} x&=C_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1)+C_2\cos(\omega_2 t+\alpha_2),\\ y&=k_1C_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1)+k_2C_2\cos(\omega_2 t+\alpha_2).\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

тоже будет решением при любых значениях C_1, C_2, α_1, α_2.

Смысл этого решения такой: если вывести систему с двумя степенями свободы из состояния равновесия, то каждая координата выразится, как функция времени, в виде суммы двух синусоидальных колебаний. Частоты ω_1 и ω_2 получаются из секулярного, или векового, или характеристического уравнения (5). Амплитуда каждой координаты в первом колебании произвольна. Но если выбрана амплитуда первой координаты C_1, то амплитуда первого колебания во второй координате не произвольна, а задается системой. То же самое имеет место для второго колебания.

Системой задаются величины ω_1, ω_2, k_1 и k_2. Величины k_1 и k_2 характеризуют *распределение* колебаний. Распределения, как и частоты, задаются параметрами системы. Абсолютные амплитуды в одной из координат, а также фазы, произвольны. Они задаются начальными условиями. (Заметим, что механика и электродинамика сами по себе не говорят, каково движение системы. Они учат, как движется система, *если заданы начальные условия.*)

Пусть при $t=0$

$$x=x_0,\ y=y_0,\ \dot{x}=\dot{x}_0,\ \dot{y}=\dot{y}_0. \qquad (7)$$

Если заданы эти четыре величины, то мы знаем, как система будет себя вести дальше. Из начальных условий (7) определяются C_1, C_2, α_1, α_2. Этим вся задача однозначно определена. В технике отыскание собственных частот часто является жизненным вопросом.

Пусть вагон (его можно схематизировать так, как показано на рис. 90) движется с определенной скоростью. Он получает удары на стыках рельс. Здесь может возникнуть резонанс (как и в системе с одной степенью свободы): если частота ударов равна ω_1 или ω_2, вагон очень сильно раскачивается[1]. У спальных вагонов плавный ход связан, между прочим, с тем, что они имеют длинные периоды собственных колебаний. В машинах резонанс может приводить к разрушениям, в электрических системах — к перенапряжениям и пробоям. Чтобы этого не было, надо избегать того, чтобы внешняя сила попадала в такт с ω_1 или ω_2.

Вернемся к (6). Движение каждой координаты — не синусообразное. То, что его можно представить в виде суммы двух синусообразных колебаний (с постоянной амплитудой), имеет существенное значение. Дело в том, что очень часто система рассматриваемого здесь вида действует в качестве источника силы на другую линейную систему. Тогда, как мы знаем, именно такое представление целесообразно[2].

Вопрос о том, какими координатами характеризовать систему, не решается однозначно. Это вопрос вкуса и удобства.

Заданием x и y или ξ и θ мы вполне определяем конфигурацию системы (рис. 90). Между теми и другими координатами имеются определенные соотношения, а именно:

$$x_1 \equiv x = \xi - l_1\theta, \quad x_2 \equiv y = \xi + l_2\theta.$$

Получим ли мы те же самые величины ω_1, ω_2, k_1 и k_2, если воспользуемся другими координатами? Частоты колебаний получаются теми же самыми (ω_1 и ω_2 инвариантны). Но распределение будет зависеть от выбора координат.

Если мы перейдем к другим координатам, то может оказаться, в частности, $H=0$ или $h=0$. Это было очень ясно на примере, который разбирался в прошлый раз. Но можно ли подобрать координаты так, чтобы и h и H обратились в нули? Если это

---

[1] [См. 26-ю лекцию.]

[2] [См. 16-ю лекцию.]

удастся, то получатся чрезвычайно простые уравнения: система распадается на две системы, описываемые уравнениями вида

$$\left.\begin{aligned} A_1\ddot{\xi} + a_1\xi = 0, \\ A_2\ddot{\eta} + a_2\eta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Частоты здесь находятся сразу:

$$\omega_1^2 = \frac{a_1}{A_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{a_2}{A_2}; \tag{9}$$

k_1 и k_2 также находятся сразу, так как здесь

$$\xi = C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1), \quad \eta = C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2). \tag{10}$$

Величины k_1 и k_2 показывают, в каком отношении находятся амплитуды одного и того же колебания в одной и другой координате. В данном случае $k_1 = 0$, $k_2 = \infty$.

Оказывается, что такие координаты подобрать можно. Если решить исходную задачу о нахождении ω_1^2, ω_2^2, k_1, k_2 и связать новые координаты с исходными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} x = \xi + \eta, \\ y = k_1\xi + k_2\eta, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

то для потенциальной и кинетической энергии получатся выражения, в которых произведения отсутствуют:

$$\left.\begin{aligned} 2U = a_1\xi^2 + \alpha_2\eta^2, \\ 2T = A_1\dot{\xi}^2 + A_2\dot{\eta}^2. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Отсюда сразу следует (8) и (9), причем частоты инвариантны по отношению к преобразованию (11).

Тривиальный случай, когда $k_1 = 0$, $k_2 = \infty$, это — случай двух не связанных маятников. Для всех рассматриваемых систем с двумя степенями свободы, как бы они ни были сложны, всегда можно подобрать такие координаты, при которых задача приводится к этому тривиальному случаю. Такие координаты называются *нормальными координатами*. Однако, чтобы подобрать нормальные координаты, нужно сначала решить задачу, выраженную уравнениями (4) и (5). Таким образом, в вычислительном смысле существование нормальных координат не дает облегчения.

Подойдем к вопросу с другой стороны.

Пусть

$$\omega^2 = \frac{ax^2 + 2hxy + by^2}{Ax^2 + 2Hxy + By^2} \tag{13}$$

(мы образуем такую дробь и *обозначаем* ее ω^2). Зададимся „странным" вопросом: при каких значениях x и y эта дробь получает максимальное значение и при каких значениях x и y — минимальное? (Здесь важны не сами x и y, а отношение x/y). Введем нормальные координаты ξ, η. Тогда

$$\omega^2 = \frac{a_1\xi^2 + a_2\eta^2}{A_2\xi^2 + A_2\eta^2}. \tag{14}$$

Если при $x = x_1$ $y = y_1$ выражение (14) имеет максимум, то при соответствующих $\xi = \xi_1$, $\eta = \eta_1$ выражение (14) тоже имеет максимум. При введении нормальных координат задача упрощается.

Пусть

$$\frac{a_1}{A_2} > \frac{a_2}{A_2}. \tag{15}$$

Если ξ и η оба отличны от нуля, то можно написать:

$$\omega^2 = \frac{a_1 + b_1}{A_1 + B_1}, \tag{16}$$

где

$$b_1 = a_2\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^2, \quad B_1 = A_2\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^2. \tag{17}$$

Не трудно видеть, что значение дроби (16) заключено между a_1/A_1 и b_1/B_1. В самом деле, пусть

$$a_1 = A_1 l;$$

тогда вследствие (15)

$$b_1 < B_1 l$$

и далее

$$\frac{a_1 + b_1}{A_1 + B_1} < \frac{A_1 l + B_1 l}{A_1 + B_1} = l,$$

т. е.

$$\frac{a_1 + b_1}{A_1 + B_1} < \frac{a_1}{A_1}.$$

Аналогично найдем:

$$\frac{a_1 + b_1}{A_1 + B_1} > \frac{a_2}{A_2}.$$

Таким образом, мы доказали следующее: какие бы ни были ξ, η, если только они не равны нулю,

$$\frac{a_2}{A_2} < \omega^2 < \frac{a_1}{A_1}.$$

Далее, есть такие значения ξ и η, при которых ω^2 принимает значения a_1/A_1 и a_2/A_2. В самом деле, первое значение ω^2 принимает при $\xi = 0$, $\eta \neq 0$, а второе — при $\xi \neq 0$, $\eta = 0$. Следовательно,

$$\frac{a_2}{A_2} \leqslant \omega^2 \leqslant \frac{a_1}{A_1}. \tag{18}$$

Получился интересный результат (нормальные координаты здесь важны для доказательства; сам результат не относится специально к нормальным координатам): максимальное значение выражения (13), т. е. отношения квадратичных форм

$$\frac{U(x, y)}{T(x, y)},$$

равно квадрату одной собственной частоты, его минимальное значение — квадрату другой собственной частоты.

Перейдем теперь к другому вопросу.

Я умышленно говорил все время об одной системе с двумя степенями свободы, а не о *двух* связанных системах, из которых каждая имеет одну степень свободы.

Система с двумя степенями свободы может получиться генетически из сближения двух систем, из которых каждая имела одну степень свободы. Часто система с двумя степенями свободы интересна как результат связи двух систем, каждая из которых имеет одну степень свободы.

Но может возникнуть обратный вопрос: имеется заданная система с двумя степенями свободы. Из каких двух систем с одной степенью свободы она произошла? Этот вопрос напрашивается сам собой. В случае рис. 99, *а* все просто, но как быть в случае рис. 100, *а*? Нужно ли считать так, как на рис. 100, *б* или так, как на рис. 100, *в*? Да и в случае рис. 99, *а* — только кажущаяся простота; какие две системы связаны здесь между собой, если взаимная индукция осуществляется через железо (рис. 99, *б*)?

Разделение целого на части не однозначно. То же самое у нас было с рядом Фурье, с помощью которого мы разлагали периодическую функцию на сумму других функций. В молекулярной физике возникает аналогичный вопрос о том, как твердые тела —

кристаллические решетки — разделять на молекулы. Но можно искать целесообразную точку зрения.

Разделение по „историческому“ признаку, по признаку того, как происходило присоединение частей одних к другим (по тому, как „приносили куски системы из магазина“), вряд ли целесообразно. Но есть целесообразное определение.

Каков критерий целесообразности определения? То, что, пользуясь им, можно установить закономерность. В данном случае целесообразно такое разделение системы, при котором можно установить закономерную связь между свойствами полной системы и свойствами парциальных систем (ее частей). Разные разделения знаконны, но все, кроме одного, ни к чему не ведут, так как не приводят к закономерностям. Во всяком случае я могу сказать, что знаю только одно определение, которое является целесообразным. Вот оно.

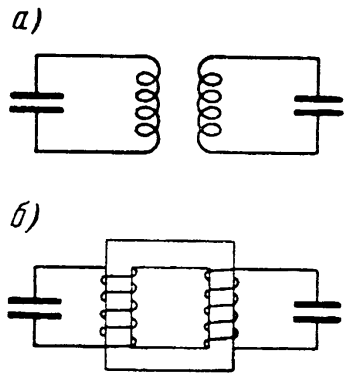


Рис. 99.

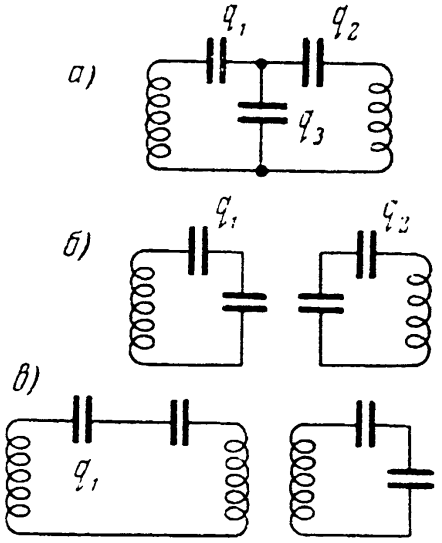


Рис. 100.

Пусть даны выражения T и U. Положим одну координату равной нулю. Мы получим систему с одной степенью свободы. Положим теперь другую координату равной нулю. Мы получим другую систему с одной степенью свободы. Связь между этими двумя парциальными системами дает нам исходную систему. Наша исходная система получается в результате связи этих двух систем.

Что значит положить $x=0$? Это значит, что мы закрепили один маятник (рис. 92, *б*) или разорвали один провод (рис. 99, *б*). Железо при этом должно остаться.

Разделение на парциальные системы зависит от тех координат, из которых мы исходим. Если в качестве координат выбраны q_1 и q_2 (рис. 100, *а*), то получатся одни парциальные системы (рис. 100, *б*).

Если ввести координаты q_1 и q_3 (рис. 100, *а*), то получатся другие парциальные системы (рис. 100, *в*).

При нашем определении период каждой парциальной системы (рис. 92, *б*) будет иной, чем у маятника без пружины. Мы просчитаем этот случай в следующий раз.

Рассмотрим (в общем случае) систему с двумя степенями свободы, как связанную. Тогда парциальные частоты n_1 и n_2 (частоты парциальных систем) определяются равенствами:

$$n_1^2 = \frac{a}{A}, \quad n_2^2 = \frac{b}{B}.$$

Найдем общее соотношение между нормальными и парциальными частотами.

Отношения a/A, b/B принадлежат к числу значений, принимаемых отношением (13), но не при $\xi = 0$ и не при $\eta = 0$. Поэтому

$$\omega_1^2 > n_1^2 > n_2^2 > \omega_2^2.$$

Итак, существует следующая закономерность: собственные частоты отдельных парциальных систем *лежат между частотами связанной системы.*

Если определить парциальные системы иначе, то между нормальными и парциальными частотами мы получим самые разнообразные соотношения.

ДВАДЦАТЬ ПЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(7/III 1931 г.)

Случай вырождения — случай двух одинаковых нормальных частот. Еще раз о парциальных системах и парциальных частотах. Задача о взаимодействии парциальных систем. Слабая и сильная связь; слабая и сильная „связанность". Нормальные колебания и перекачка энергии в случае слабой и сильной „связанности". Парадокс, связанный с полной перекачкой энергии при сколь угодно слабой связи.

Мы разбираем системы с двумя степенями свободы, описываемые уравнениями вида

$$\left.\begin{aligned} A\ddot{x} + H\ddot{y} + ax + hy = 0, \\ H\ddot{x} + B\ddot{y} + hx + by = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Решая эти уравнения, мы узнаем частоты колебаний и отношения амплитуд, с которыми колеблются координаты x и y.

Может ли система с двумя степенями свободы иметь две одинаковые нормальные частоты?

Для этого должно быть

$$\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{h}{H}\,. \tag{2}$$

Это возможно, если кинетическая энергия пропорциональна потенциальной энергии, или, точнее, если квадратичная форма $T(x,y)$ пропорциональна квадратичной форме $U(x,y)$.

Мы видели, что нормальные частоты суть максимальное и минимальное значения определенной дроби[1]. Здесь максимальное и минимальное значения совпадают. В случае (2) дробь имеет постоянное значение. Легко убедиться, что этот случай — настолько вырожденный, что он физически мало интересен.

В этом случае соответствующей обработкой уравнений можно сразу перейти к одной координате (без введения нормальных координат).

Умножим первое уравнение (1) на B, второе на H и вычтем:

$$(AB-H^2)\ddot{x}+(aB-hH)x=0. \tag{3}$$

Аналогичным образом получим:

$$(AB-H^2)\ddot{y}+(bA-hH)y=0. \tag{4}$$

Хотя это сразу, может быть, не видно, но для каждого из двух контуров, связанных так, что выполняется условие (2), получается отдельное уравнение (3) или (4). При соответствующем подборе коэффициента взаимной индукции M два контура (рис. 101) не связаны друг с другом. Связь через емкость и связь через взаимную индукцию компенсируют друг друга, в результате чего получаются два несвязанных контура.

Как было сказано в прошлой лекции, наша система может рассматриваться как состоящая из двух выделяемых определенным образом частичных (парциальных) систем, которые связаны между собой.

Часто опыт делается так, что приводит к следующей постановке вопроса: имеются две колебательные системы; как происходит взаимодействие между ними? Особенно важную роль играет такая постановка вопроса в молекулярной динамике, в тех случаях, когда изучается взаимодействие двух атомов. По волновой

[1] [См. 24-ю лекцию, формула (13) и дальше.]

механике взаимодействие двух атомов — это взаимодействие двух колебательных систем.

При том определении составляющих (парциальных) систем, которое мы дали, частоты каждой из них лежат между нормальными частотами (рис. 102). Связывая системы, мы раздвигаем нормальные частоты. Это — общая теорема, но если бы мы определили парциальные системы по-другому, то она была бы несправедлива.

Выбор парциальных систем зависит от выбора координат.

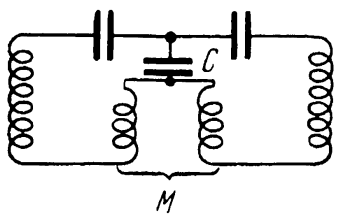


Рис. 101.

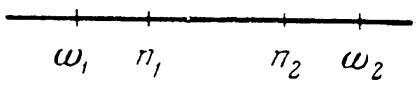


Рис. 102.

Если в выражении для потенциальной энергии $h \neq 0$, то мы говорим, что имеется силовая (емкостная) связь; если в выражении для кинетической энергии $H \neq 0$, — что имеется инерциальная (индуктивная) связь; если $h \neq 0$, $H \neq 0$, — что имеется смешанная связь.

Это понятие качества или рода связи не инвариантно по отношению к выбору координат. Также не инвариантна и величина связи. Но остановимся на определенных координатах. Тогда имеет полный смысл говорить о том, что имеется связь определенного рода.

В случае равных корней секулярного уравнения согласно (2) налицо либо оба вида связи, либо оба отсутствуют. В нашем примере с вагоном (рис. 90), если мы берем координаты x_1 и x_2, получается инерциальная связь, а если мы берем координаты ξ и θ — силовая. Здесь сразу можно сказать, что корни неравны.

Рассмотрим теперь подробно взаимодействие парциальных систем. Выделим существенные вопросы и разберем их на несложном примере. Рассмотрим случай двух связанных маятников (рис. 103). Мы будем говорить о взаимодействии между двумя связанными системами, входящими в состав одной системы с двумя степенями свободы. Здесь

$$\begin{aligned} 2T &= I_1\dot{\varphi}_1^2 + I_2\dot{\varphi}_2^2, \\ 2U &= P_1\varphi_1^2 + P_2\varphi_2^2 + \lambda(\varphi_1 - \varphi_2)^2, \end{aligned} \tag{5}$$

где I_1 и I_2 — моменты инерции маятников; P_1 и P_2 — произведения их весов на расстояния центров тяжести от осей; λ — пропорцио-

нально коэффициенту упругости пружины. Можно сразу сказать, что в *данных* координатах связь силовая, так как

$$2U=(P_1+\lambda)\varphi_1^2+(P_2+\lambda)\varphi_2^2-2\lambda\varphi_1\varphi_2.$$

Полагая $\varphi_2=0$ или $\varphi_1=0$ (закрепляя маятники), получаем парциальные системы. Для них потенциальная энергия

$$U_1=\frac{P_1+\lambda}{2}\varphi_1^2 \text{ и } U_2=\frac{P_2+\lambda}{2}\varphi_2^2.$$

Собственные частоты парциальных (в нашем толковании) систем равны:

$$n_1=\sqrt{\frac{P_1+\lambda}{I_1}},\quad n_2=\sqrt{\frac{P_2+\lambda}{I_2}}. \qquad (6)$$

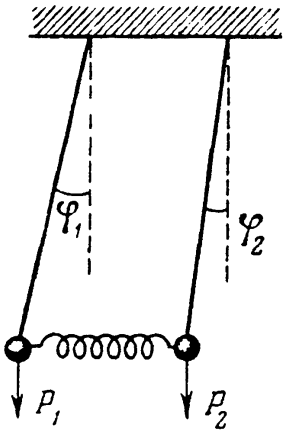


Рис. 103.

Обычно под частотами отдельных систем понимают:

$$n_1^*=\sqrt{\frac{P_1}{I_1}},\quad n_2^*=\sqrt{\frac{P_2}{I_2}}. \qquad (7)$$

Это — нечто другое. При $n_1=n_2$ возможно и $n_1^*=n_2^*$.

Мы увидим, что́ влечет за собой равенство или неравенство парциальных частот в нашем понимании. Мы увидим, что частотами парциальных систем целесообразно считать именно n_1 и n_2; особые явления наступают тогда, когда $n_1=n_2$, а не в том случае, когда маятники *без пружин* имеют одинаковые частоты (т. е. $n_1^*=n_2^*$).

Напишем, исходя из (5) и (6), уравнения движения, разделив их на I_1 и I_2:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\varphi}_1+n_1^2\varphi_1-\frac{\lambda}{I_1}\varphi_2=0;\\ \ddot{\varphi}_2+n_2^2\varphi_2-\frac{\lambda}{I_2}\varphi_1=0.\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Общее решение есть

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1=C_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1)+C_2\cos(\omega_2 t+\alpha_2),\\ \varphi_2=k_1C_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1)+k_2C_2\cos(\omega_2 t+\alpha_2),\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

причем

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2 \pm \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4\lambda^2/I_1 I_2}}{2}, \tag{10}$$

$$k_{1,2} = \frac{n_1^2 - n_2^2 \mp \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4\lambda^2/I_1 I_2}}{2\lambda/I_1}. \tag{11}$$

Если для частоты мы берем знак плюс, то для коэффициента k нужно брать знак минус.

Выясним физическое содержание этих формул.

Принято вводить обозначение

$$\rho^2 = \frac{\lambda^2}{(P_1 + \lambda)(P_2 + \lambda)} \tag{12}$$

и называть отвлеченное число ρ коэффициентом связи. Последний член под корнем в (10) и (11) можно написать так:

$$\frac{4\lambda^2}{I_1 I_2} = 4\rho^2 n_1^2 n_2^2.$$

Здесь нет пока хорошей терминологии. Говорят, что *связь слаба*, если

$$\rho \ll 1. \tag{13}$$

Это значит, что добавочный член в энергии, обусловленной связью, мал по сравнению с остальными. Но это мало что дает, т. е. *не это* характеризует явления.

Немного больше дало бы такое определение малости связи:

$$\frac{\lambda}{P_1 + \lambda} \ll 1, \quad \frac{\lambda}{P_2 + \lambda} \ll 1.$$

Это значило бы, что связь мала, если пружина мало влияет *на каждый* маятник.

Существенна *другая* малость. Важно соотношение двух величин под корнем:

$$(n_1^2 - n_2^2)^2 \quad \text{и} \quad 4\rho^2 n_1^2 n_2^2.$$

Важно, как мы сейчас увидим, выполняется или нет условие

$$\rho \ll \frac{|n_1^2 - n_2^2|}{n_1 n_2}. \tag{14}$$

Решающее значение имеет разность $n_1^2 - n_2^2$. Если $n_1 = n_2$, то физически не бывает слабой связи.

Важна степень физической „связанности". И в том случае, когда ρ очень мало, т. е. связь очень мала, „связанность" систем может быть велика.

Выразим это иначе. Нас интересует, получится ли сильное взаимодействие. Оказывается, что в случае, когда ρ очень мало по отношению к единице, но не по отношению к $|n_1^2 - n_2^2|/n_1 n_2$, то, несмотря на „слабую связь", взаимодействие будет очень сильное.

Если мы хотим определить „связанность" так, чтобы она характеризовала взаимодействие, то в качестве условия малой связанности нужно требовать, чтобы выполнялось условие (14). При этом если $n_1 = n_2$, то вообще не может быть малой „связанности".

Если отдельные системы расстроены одна по отношению к другой, то с точностью до величин второго порядка по λ (т. е. если отбросить члены порядка λ^2 и т. д.)

$$\omega_1^2 = n_1^2, \quad \omega_2^2 = n_2^2.$$

При слабой связи, если „связанность" достаточно слабая, то в первом порядке нормальные частоты не отличаются от парциальных.

Рассмотрим величины k_1 и k_2. Величина k_1 характеризует относительную силу первого колебания во второй координате; величина $1/k_2$ характеризует относительную слабость второго колебания в первой координате.

При вычислении k_1 мы не имеем права пренебречь λ^2. С точностью до членов высшего порядка по λ

$$k_1 = -\frac{\lambda}{(n_1^2 - n_2^2) I_2}, \quad k_2 = \frac{(n_1^2 - n_2^2) I_1}{\lambda}.$$

Если I_1 и I_2 — одного и того же порядка, но если $\lambda/(n_1^2 - n_2^2)$ малая величина, то k_1 — очень малая, k_2 — очень большая величина. Картина ясна: первое колебание ограничено главным образом первой системой, второе колебание — главным образом второй системой. Каждая частота соответствует „своему" маятнику. Уже одно это показывает, что физически связь очень мала. Каждый маятник колеблется почти так, как будто бы другого нет.

Если $n_1 = n_2 = n$, то для частот получаются такие выражения:

$$\omega_1^2 = n^2(1 + \rho), \quad \omega_2^2 = n^2(1 - \rho).$$

Если парциальные системы имеют одинаковые собственные периоды, то, как мы видим, связь сказывается на частотах в первом порядке по λ (так как ρ пропорционально λ). При различных n_1 и n_2 частоты *не* отличались в первом по λ. Важно знать, что получится при $n_1 = n_2$ для k_1 и k_2. Здесь

$$k_1 = -\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}, \quad k_2 = +\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}.$$

Теперь относительная сила первого колебания во втором маятнике и второго колебания в первом вовсе не мала. В частности, если $I_1 = I_2$, то

$$k_1 = -1, \quad k_2 = 1,$$

причем это соотношение *не* зависит от величины связи. Как бы связь ни была слаба, и первое и второе колебания одинаково сильно представлены как в первом, так и во втором маятнике:

$$\varphi_1 = C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2);$$

$$\varphi_2 = -C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Резюмируем. Если оба маятника расстроены ($n_1 \neq n_2$) и слабо связаны [выполнено (14)], то каждый сохраняет приблизительно свою частоту. Если мы отклоним и приведем в колебание первый маятник, то второй почти не колеблется.

Совсем другое дело в случае *равных* парциальных частот. Как бы ни была слаба связь, нормальные колебания таковы: маятники колеблются с одинаковыми амплитудами, при более быстром колебании — навстречу друг другу (рис. 104, *а*), при более медленном — в одну сторону (рис. 104, *б*).

Таковы нормальные (синусоидальные) колебания. Посмотрим теперь, каково будет взаимодействие, если мы выведем первый маятник из состояния равновесия, а второй — нет. При этом будет колебание, отличное от нормального. Нам нужно решить задачу о том, как передается энергия от одного маятника к другому.

Зададим для простоты такие начальные условия. Пусть при $t = 0$

$$\varphi_1 = 1, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \dot{\varphi}_1 = 0, \qquad \dot{\varphi}_2 = 0.$$

Взяв в (9) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, мы удовлетворим последним двум условиям. Первые два условия дают уравнения:

$$C_1 + C_2 = 1, \quad k_1 C_1 + k_2 C_2 = 0,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{k_2}{k_1 - k_2}, \quad C_2 = \frac{k_1}{k_1 - k_2},$$

так что

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{k_1 - k_2}(-k_2 \cos \omega_1 t + k_1 \cos \omega_2 t), \\ \varphi_2 &= \frac{k_1 k_2}{k_1 - k_2}(-\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t). \end{aligned} \tag{15}$$

Эти уравнения и дают нам ответ на вопрос о том, как передается энергия от первого маятника ко второму, если вначале возбужден первый маятник.

Заметим, что выражение для φ_2 можно представить в виде

$$\varphi_2 = \frac{2k_1 k_2}{k_1 - k_2} \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t. \tag{16}$$

Второй множитель — быстро колеблющаяся синусоида, а первый множитель — переменная амплитуда. Получаются *биения*. Максимальное значение φ_2 наступает тогда, когда оба множителя равны единице:

$$\varphi_{2\max} = \frac{2k_1 k_2}{k_1 - k_2},$$

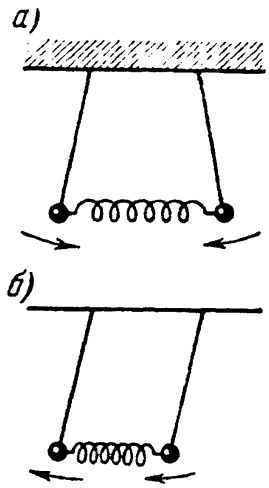


Рис. 104.

или, если подставить сюда (11),

$$\varphi_{2\max} = \frac{2\lambda}{I_2 \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4\lambda^2 / I_1 I_2}}. \tag{17}$$

Возьмем первый случай, когда

$$(n_1^2 - n_2^2)^2 \gg \frac{4\lambda^2}{I_1 I_2}.$$

Тогда приближенно

$$\varphi_{2\max} = \frac{2\lambda}{I_2 (n_1^2 - n_2^2)}.$$

Таким образом, если парциальные системы расстроены, то при слабой связи передача энергии ничтожна и тем меньше, чем меньше λ.

Совсем иначе будет в случае, если парциальные системы настроены, т. е. $n_1 = n_2$. Тогда

$$\varphi_{2\max} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}.$$

При „резонансе" парциальных частот колебание „заразительно". Если $I_1 = I_2$, т. е. маятники тождественны, то $\varphi_{2\max} = 1$, — максимальное значение отклонения второго маятника равняется начальному отклонению первого маятника. Это значит, что *вся* энергия передается через некоторое время второму маятнику. В этом состоит другое проявление того, что если связь как угодно слаба, но отдельные системы друг на друга настроены, то все же „связанность" очень велика.

Если есть различие между n_1 и n_2, то всегда можно выбрать столь малое λ, чтобы не было заметного взаимодействия. Если же $n_1 = n_2$, то „слабо" связать системы невозможно: всегда есть сильное взаимодействие.

Как зависит амплитуда $\varphi_{2\max}$ от расстройки? Формула (17) напоминает формулу

$$X = \frac{E}{L\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}} \tag{18}$$

для колебаний системы с одной степенью свободы под действием синусоидальной внешней силы. Там мы имели явления резонанса. Структура формулы (17) — совершенно та же. Достаточно малой расстройки между частотами, чтобы сильно расстроить передачу энергии.

Но в случае (18) амплитуда силы постоянна, теперь же она переменна. Второй маятник не может получить больше энергии, чем имеет вначале первый. Когда один раскачивается, другой теряет энергию. Здесь — не действие на маятник силы с заданной амплитудой, а *взаимодействие*. Как бы велико ни было λ, $\varphi_{2\max}$ не будет больше единицы.

Картина смещений обоих маятников показана на рис. 105.

При очень слабой связи перекачка энергии от первого маятника ко второму происходит очень медленно, но если $n_1 = n_2$, то в конце концов перекачается *вся* энергия. Но можно ли поверить, что такая полная перекачка получится на самом деле при сколь угодно слабой связи? Мы пришли к парадоксу. В реальных условиях этого не может быть. Теория правильна, но она перестает

быть применимой при слишком малой связи. В молекулярной физике область применимости нашей теории простирается гораздо дальше, чем для маятников. Там она дает „парадоксальные", но реально наблюдаемые вещи: очень сильное взаимодействие при чрезвычайно слабых связях. Там это имеет еще большее значение, чем в обычной теории колебаний.

Разберем подробнее наш парадоксальный результат.

Пусть λ очень мало (представим себе, что мы уносим второй маятник в другую комнату). Тогда приближенно

$$\omega_1 = n\left(1+\frac{\rho}{2}\right),\quad \omega_2 = n\left(1-\frac{\rho}{2}\right).$$

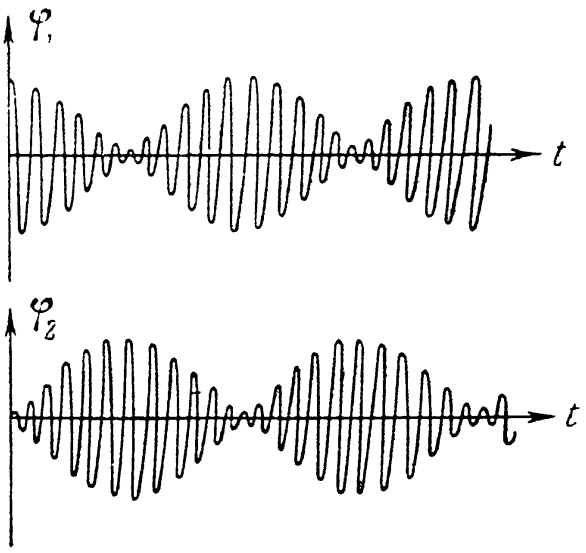


Рис. 105.

Разность нормальных частот $\omega_1 - \omega_2$ очень мала по сравнению с $\omega_1 + \omega_2$. В начальный момент величина φ_2 равна нулю. Она станет заметной только через колоссальное время. В предельном случае бесконечно слабой связи перекачка будет длиться бесконечное время. Это и ограничивает применение теории на практике. Будем оценивать время по отношению к периоду. Если перекачка длится 10^{10} периодов, то это практически значит, что перекачки никогда не произойдет. Но в молекулярной физике 10^{10} периодов составляют, например, 10^{-2} секунды, а это на наши масштабы — конечное время.

Но это еще не все. Мы вели расчет для идеальных условий. Если передача должна длиться очень долго, то прежде чем она произойдет, вся энергия будет „съедена" даже маленьким трением.

В том, что было сказано о перекачке, математическая сторона ясна, но возникает следующий физический вопрос. Пустим левый маятник. Он толкает правый маятник, раскачивает его. Пусть правый раскачался настолько, что он обладает половиной всей энергии. Почему его энергия будет и дальше увеличиваться? Строгий ответ дается математическим решением задачи, но хочется иметь наглядную картину. Дело в том, что левый маятник сообщает толчки правому маятнику в *определенные* моменты. В случае $n_1 = n_2$ толчки продолжают наступать в моменты, благоприятные

для передачи энергии от левого маятника к правому, и после того, как энергии маятников сравнялись. Дело здесь не в запасе энергии у каждого из маятников, а в том, как распределены толчки во времени.

ДВАДЦАТЬ ШЕСТАЯ ЛЕКЦИЯ

(17/III 1931 г.)

Примеры, где существенное значение имеет распределение нормальных колебаний. Когда можно приближенно рассматривать связанные колебания как вынужденные. Приближенное вычисление изменения нормальной частоты при малом изменении параметра. Вырожденный случай. Эффект слабой связи в теории возмущений. Вынужденные колебания в системе с двумя степенями свободы. Теорема взаимности. Резонанс. Успокоение.

Для систем с двумя степенями свободы нам остается, во-первых, подвести некоторые итоги, во-вторых, разобрать вынужденные колебания и, наконец, разобрать вопрос о затухании колебаний.

В прошлый раз мы рассчитали до конца простой пример двух связанных маятников. В общем случае электрической или механической системы, обозначая координаты через x и y, мы имеем общее решение вида

$$x = C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2),$$

$$y = k_1 C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + k_2 C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Каждая координата совершает движение, которое может быть представлено, вообще говоря, как сумма двух гармонических колебаний с определенными периодами. В частности, система может колебаться с одним периодом (если $C_1 = 0$ или $C_2 = 0$). Эти особенные колебания с одним периодом называются нормальными. Величины k_1 и k_2 характеризуют распределение нормальных колебаний по координатам. Знание периодов существенно в вопросах резонанса. Укажем теперь примеры, на которых выяснилось, насколько важно для чисто технических вопросов знание также и величин k_1 и k_2.

Пусть система колеблется под действием внешнего источника колебаний. Если внешняя сила действует только на одну парциальную систему, то тем не менее одновременно приходят в колебание обе. Если частота внешней силы значительно отличается от нормальных частот, то тип колебаний существенно другой, чем при нормальных колебаниях. Но пусть частота внешней силы очень близко подходит к ω_1 или ω_2. Тогда система начинает возбуждаться очень сильно (резонанс) и, кроме того, тип колебаний становится почти таким же, как при соответствующем нормальном колебании.

Физически речь может идти, например, о двух маятниках (рис. 86). Это — модель парохода с успокоителем качки[1], или пловучего маяка (фонарь подвешен на буе).

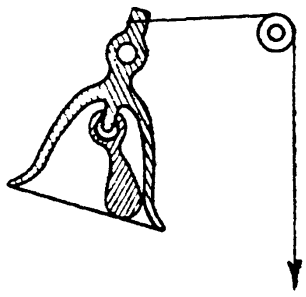


Рис. 106.

Вот еще система с двумя степенями свободы: колокол и язык (рис. 106). В 70-х годах прошлого века наблюдался случай, когда очень большой колокол не звонил. Постараемся понять, в чем здесь дело. Для того, чтобы сильно раскачать колокол, его тянут с одним из собственных периодов. Тип колебания приблизительно такой же, как при собственных колебаниях. Пусть $k_1 = 1$. Это значит, что вблизи резонанса $x = y$. Колокол отклоняется так же, как и язык. Они колеблются как целое, и язык не ударяет в колокол.

Для того, чтобы колокол или пловучий маяк правильно действовали, нужно, чтобы было $y = 0$, т. е. $k_1 = 0$ (y — отклонение языка или фонаря). Но в связанной системе никогда не бывает $k_1 = 0$: идеально успокоить фонарь невозможно. Чтобы обойти эту трудность, делают фонарь с очень большим собственным периодом. Здесь мы возвращаемся к уже известному нам случаю действия силы с коротким периодом на систему с очень длинным собственным периодом[2].

Обратимся снова к вопросу о взаимодействии между парциальными системами. Мы знаем, что здесь возможны два существенно различных случая — слабой и сильной „связанности“. Если парциальные системы расстроены и связь мала, то в первом приближении каждая из них колеблется „сама по себе“. Если частоты

---

[1] [См. 27-ю лекцию.]

[2] [См. 20-ю лекцию.]

парциальных систем совпадают, сильное взаимодействие будет и при сколь угодно слабой связи.

Вопрос о взаимодействии при слабой связи интересен и получил решающее значение в теории возмущений. Для того, чтобы понять, в чем тут дело, напишем снова уравнения связанных маятников:

$$\ddot{\varphi}_1 + n_1^2\varphi_1 = \frac{\lambda}{I_1}\varphi_2;$$

$$\ddot{\varphi}_2 + n_2^2\varphi_2 = \frac{\lambda}{I_2}\varphi_1.$$

Если бы во втором уравнении справа стояла заданная функция времени, то для второй парциальной системы была бы задача о вынужденных колебаниях системы с одной степенью свободы. Эту задачу мы уже рассматривали. Но в действительности мы не знаем $\varphi_1(t)$, ибо φ_1 связана таким же уравнением с φ_2, как φ_2 с φ_1. Поэтому здесь нужна *новая* теория.

Вначале встречались такого рода недоумения. Если мы сначала пустим первую систему, то она должна колебаться со своим собственным периодом и на вторую систему будет действовать периодическая сила с частотой n_1. Между тем по теории должно быть *две* частоты. Откуда взялась вторая частота?

Парадокс получался только потому, что не умели правильно решать задачу. Существование двух частот вполне естественно и с физической точки зрения: если первое движение возбуждает второе, то оно изменяется под действием этого второго движения. Сила, действующая на φ_2, уменьшается по амплитуде, а сила с переменной амплитудой — это уже не синусообразная сила.

Но есть ли случаи, когда применимы рассуждения, сводящие задачу о связанных колебаниях на задачу о вынужденных? Если они есть, то в таких случаях удобно решать задачу, как задачу о вынужденных колебаниях. (Например, радиопередатчик на 100 квт и приемник образуют связанную систему, но здесь наверное можно считать, что приемник совершает колебания под действием заданной внешней силы.)

В нашем случае линейной системы задачу о связанных колебаниях можно свести приближенно к задаче о вынужденных колебаниях тогда, когда связь мала и есть сильная расстройка между парциальными системами ($|k_1| \ll |k_2|$). При этом можно положить

$$x = \cos \omega_1 t$$

(x колеблется почти так, как будто второй координаты нет). Случай, когда связь мала по отношению к расстройке, соответствует слабой связанности в нашем смысле.

Можно показать, что и при совпадении парциальных частот, т. е. когда $n_1 = n_2$, если связь слабая, такой способ рассмотрения допустим в первое, начальное время после того, как пустили первый маятник (второй вначале покоится), т. е. в течение определенного числа периодов, зависящего от связи. Это время тем меньше, чем больше связь. Здесь нельзя забывать, что с течением времени наступает полная перекачка энергии.

До сих пор затухание не учитывалось. Пусть теперь имеется затухание и такое, что колебания затухнут раньше, чем успеет произойти заметная перекачка энергии. Тогда и при настройке парциальных систем ($n_1 = n_2$) мы получим все, что нужно, сводя задачу о связанных колебаниях на задачу о вынужденных колебаниях.

Разумеется, как угодно малая расстройка физически не может играть никакой роли в теории связанных колебаний. В окончательном результате не может иметь значения, являются ли парциальные системы тождественными или слегка различными. Как теперь известно, эту точку зрения нельзя переносить в теорию атомных явлений. Там мы имеем основание говорить об особых случаях полной тождественности двух систем. Вне наших возможностей не допустить различия двух макроскопических систем хотя бы на один атом. В макроскопических системах точное число атомов не может играть роли. Но когда речь идет об *одном* атоме, дело обстоит иначе. Различие между тождественностью и нетождественностью системы имеет в волновой механике важный физический смысл.

Возьмем связанную систему (рис. 107). Как выделить нормальные колебания на опыте? С помощью волномера (при очень слабой связи между волномером и исследуемой системой) можно разделить колебания с частотами ω_1 и ω_2; но если они близки, то раздельный прием очень труден. Свяжем, однако, с исследуемой системой две катушки так, как показано на рис. 107. Тогда ток I будет линейной комбинацией координат x и y:

$$I = s_1 x + s_2 y.$$

Если мы подберем коэффициенты трансформации s_1 и s_2 так, чтобы было $s_1 + s_2 k_1 = 0$, т. е. $s_1/s_2 = -k_1$, то в токе I будет

отсутствовать частота ω_1, и мы физически осуществим в дополнительной цепи вторую нормальную координату. Аналогичным образом мы можем физически осуществить первую нормальную координату.

В теории колебаний встречается целый класс задач следующего типа. Дана система с такими-то частотами и такими-то распределениями амплитуд. Изменим параметры системы. Как изменятся при этом частоты и распределения?

Вообще говоря, для новых значений параметров нужно заново решать всю задачу о нахождении частот и распределений. Но часто бывает так, что параметры изменены *очень мало*, и тогда, в первом приближении, можно узнать, как меняются частота и распределение без сложных вычислений.

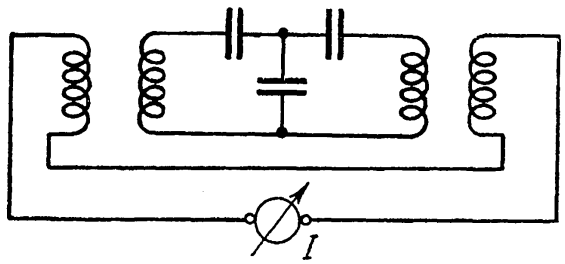


Рис. 107.

Такой подход характерен для теории возмущений. Проиллюстрируем его на простом примере системы с двумя степенями свободы. Напишем снова:

$$U = ax^2 + 2hxy + by^2,$$
$$T = A\dot{x}^2 + 2H\dot{x}\dot{y} + B\dot{y}^2.$$

Отбросим точки в выражении для T, обозначим

$$\frac{y}{x} = \xi$$

и составим отношение полученных таким образом выражений:

$$\frac{a + 2h\xi + b\xi^2}{A + 2H\xi + B\xi^2}. \qquad (1)$$

Мы доказали, что максимальное и минимальное значения этой функции от ξ получаются соответственно при $\xi = \xi_1$ и $\xi = \xi_2$ и равны квадратам нормальных частот[1].

Пусть теперь немного изменился один из параметров, входящий в T или U. Изменятся нормальные частоты и отношения ξ_1 и ξ_2. Утверждение состоит в следующем: чтобы найти с точностью до величин второго порядка относительно изменения параметра новый максимум выражения (1), нужно подставить в него *прежнее* ξ_1.

[1] [См. 24-ю лекцию.]

Докажем это. Будем менять, скажем, параметр a и рассматривать ω_1^2 как функцию параметра a и величины ξ_1:

$$\omega_1^2 = f(a, \xi),$$

причем $\xi = \xi(a)$, т. е.

$$\omega_1^2 = f[a, \xi(a)].$$

Если меняется параметр a, то меняется и ω_1^2, причем в первом порядке:

$$\Delta\omega_1^2 = \frac{\partial f}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{d\xi}{da}\Delta a,$$

где производную $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ нужно брать при неизмененных параметрах и подставить в нее старое значение a.

Но при старом значении a подстановка значения $\xi = \xi_1$ обращает величину ω_1^2 в максимум, и потому

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = 0, \quad \Delta\omega_1^2 = \frac{\partial f}{\partial a}\Delta a.$$

Изменение ξ выпадает.

Для того, чтобы пояснить математическую сторону дела, приведем следующий пример: возьмем функцию

$$x^2 + ax$$

и изменим параметр a. При этом изменяется значение x, дающее экстремум функции. Но если a изменяется на малую величину *первого* порядка, то значение x, соответствующее экстремуму, остается прежним с точностью до величин *второго* порядка.

Только что указанный простой способ нахождения изменения частот имеет одно очень важное исключение. Это — случай, когда в исходной системе нет связи и обе частоты совпадают:

$$n_1^2 = \frac{a}{A} = n_2^2 = \frac{b}{B},$$

а возмущение заключается в том, что вводится малая связь.

Если мы захотим применить общий способ, мы должны будем подставить в выражение (1) для возмущенной системы значения ξ в невозмущенной системе. Но чему считать равным это ξ? Неизвестно. В исходной системе ξ может иметь какие угодно значения. Так решать задачу нельзя.

Но легко доказать следующее. Если

$$\frac{a}{A}=\frac{b}{B},$$

то при наличии связи

$$\xi_1=-\xi_2,\quad \xi_1=\sqrt{\frac{a}{b}},$$

а раз мы нашли ξ_1 и ξ_2, то очень просто найти обычным путем нормальные частоты как максимум и минимум выражения (1). Здесь также есть исключительный случай — тот, когда

$$\frac{h}{H}=\frac{a}{A}.$$

Но тогда и при возмущении попрежнему нет связи.

Случай, когда две тождественные системы с одной степенью свободы, сначала не связанные, приходят в слабую связь, имеет в теории возмущений большое значение. При этом всегда наступает полная перекачка энергии. К этому случаю применим только что указанный способ расчета.

Перейдем к вопросу о действии внешней периодической силы на систему с двумя степенями свободы. Вернемся к уравнениям Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i.$$

Если обобщенные силы Q_i содержат, помимо слагаемых Q_i', имеющих потенциальную энергию:

$$Q_i'=-\frac{\partial U}{\partial q_i},$$

еще слагаемые Q_i'', происходящие от внешних воздействий, уравнения принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)+\frac{\partial (U-T)}{\partial q_i}=Q_i''.$$

Пусть система имеет две степени свободы и пусть на координаты x и y действуют синусоидальные силы с частотой p (например, рис. 108). Тогда мы получаем уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned} A\ddot{x}+H\ddot{y}+ax+hy&=X\cos pt;\\ H\ddot{x}+B\ddot{y}+hx+by&=Y\cos pt.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} x &= \alpha \cos pt, \\ y &= \beta \cos pt. \end{aligned} \tag{3}$$

Подставляя эти формулы в дифференциальные уравнения, получаем для α и β систему алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} (a - Ap^2)\alpha + (h - Hp^2)\beta &= X; \\ (h - Hp^2)\alpha + (b - Bp^2)\beta &= Y. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Из них мы определим амплитуды обеих координат при действии внешней силы. При собственном колебании детерминант должен был равняться нулю. Из этого условия мы определяли нормальные частоты. При любом p, таком, что детерминант системы отличен от нуля, система (4) имеет решение. При этом однородные уравнения не имеют решения.

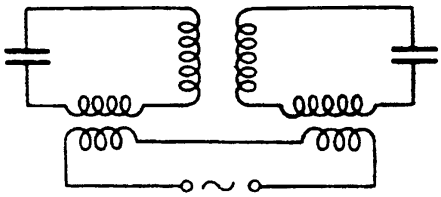


Рис. 108.

Напишем решения неоднородных уравнений в виде отношения детерминантов:

$$\alpha = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} X & h - Hp^2 \\ Y & b - Bp^2 \end{vmatrix}, \quad \beta = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a - Ap^2 & X \\ h - Hp^2 & Y \end{vmatrix}, \tag{5}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a - Ap^2 & h - Hp^2 \\ h - Hp^2 & b - Bp^2 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Здесь возникает ряд вопросов, чуждых системе с одной степенью свободы.

Пусть $Y = 0$, $X \neq 0$ (сила действует только на первую парциальную систему). Тогда

$$\beta = -\frac{X(h - Hp^2)}{\Delta}.$$

Пусть теперь сила действует только на вторую парциальную систему: $X = 0$, $Y \neq 0$. При этом

$$\alpha = -\frac{Y(h - Hp^2)}{\Delta}.$$

Мы получили замечательное свойство — свойство, далеко идущее и очень общее: если на вторую координату действует сила

$Y=1$, то движение первой координаты — такое же, как движение второй координаты, когда на первую будет действовать сила $X=1$. Это — знаменитая *теорема взаимности*. Она справедлива для систем с любым числом степеней свободы, и — в соответствующим образом измененной формулировке — для сплошных систем. Она широко применяется в радиотехнике и в оптике.

Я укажу на одно ее применение в беспроволочной телеграфии. Имеются две радиостанции A и B с какими угодно антеннами. Пусть один раз станция A передает, а B принимает, а в другой раз B передает, а A принимает. Теорема взаимности утверждает, грубо говоря, что станция A так же принимает станцию B, как станция B принимает станцию A. Если в направлении B станция A передает сильнее, то она и принимает сильнее колебания, приходящие из направления B. Это отнюдь не само собой понятно. Это связано с линейностью уравнений. Вот тривиальный пример, когда это перестает быть справедливым. Пусть антенна станции A перегружается, в ней пробивается изоляция. Тогда станция B принимать не будет, а станция A попрежнему хорошо принимает станцию B. Это происходит потому, что нарушается линейность: когда происходит пробой, ток не растет пропорционально напряжению, проводник не подчиняется закону Ома.

Ионизированные слои атмосферы не подчиняются линейным зависимостям. При достаточно больших амплитудах они должны дать нарушение взаимности, но я не думаю, чтобы это легко было обнаружить на опыте [1].

Вернемся к формулам (5) и (6).

Пусть p приближается к ω_1 или ω_2. При этом

$$\Delta \to 0, \quad \alpha \to \infty, \quad \beta \to \infty.$$

Получаются два положения резонанса. При приближении к резонансу начинает играть роль затухание, но если мы захотим его учесть, то нам нужно будет решать чрезвычайно громоздкие уравнения.

Затухание приводит к тому, что при резонансе получается чрезвычайно большая, но конечная амплитуда. Для многих вопросов достаточно знать, при каких частотах имеет место резонанс. На этот вопрос уравнения (5) часто дают достаточно правильный

[1] [Нелинейные явления в ионосфере (Люксембург-Горьковский эффект) были впервые замечены в 1933 г.]

ответ. Важно подчеркнуть, что система отвечает особенно сильно на *две* частоты.

Рассмотрим теперь очень специфический случай. Пусть

$$Y=0, \quad p=\sqrt{\frac{b}{B}}=n_2$$

(внешняя сила действует только на *первую* парциальную систему. Ее частота равна частоте *второй* парциальной системы). В этом случае получаем согласно (5)

$$\alpha=0.$$

Таким образом, если на парциальную систему x действует сила с частотой, равной собственной частоте парциальной системы y, то в координате x колебание не возбуждается. Это имеет очень важное практическое значение для электрических фильтров и успокоителей механических колебаний, например устройств для успокоения качки корабля.

ДВАДЦАТЬ СЕДЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(27/III 1931 г.)

Механические успокоители и электрические „пробки". Отсутствие резонанса при совпадении частоты внешней силы с одной из нормальных частот и в случае внешней силы, ортогональной к нормальному колебанию. Линейная система с двумя степенями свободы при наличии трения. Метод, позволяющий находить интегральные эффекты, не решая дифференциального уравнения.

В прошлый раз мы начали исследование поведения линейной системы с двумя степенями свободы под действием периодических внешних сил. Следует, может быть, напомнить, что наши обобщенные координаты x и y, вообще говоря, не являются декартовыми координатами. Поэтому наши внешние силы являются обобщенными силами (обобщенной силой может быть, например, момент силы). Но для простоты мы говорим просто о силах.

Пусть сила действует только на правую координату, а ее частота p равна собственной частоте второй координаты:

$$p=\sqrt{\frac{b}{B}}=n_2.$$

Тогда, как было показано в прошлой лекции, амплитуда первой координаты $\alpha = 0$. При этом амплитуду β второй координаты легко найти. Итак, в этом случае первая координата не колеблется. Это справедливо при любых h и H.

Если на один груз (M_1; рис. 109) действует периодическая сила, он будет совершать вынужденные колебания при всяком периоде силы. Привяжем пружину со вторым грузом M_2 (рис. 109), и пусть p соответствует собственной частоте второй пружины с грузом (при закрепленном первом грузе). Тогда амплитуда колебания первого груза равна нулю, происходит его *успокоение:* под действием прежней периодической силы он остается теперь в покое.

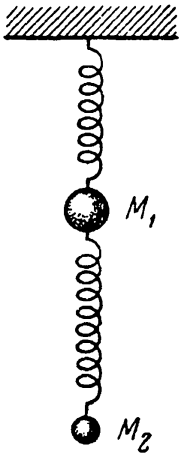


Рис. 109.

Если на диск, насаженный на вал (рис. 98), действует момент с парциальной частотой второго диска, то вращательные колебания первого диска будут успокоены.

Это явление находит существенные применения. На нем основаны механические успокоители.

Если установить на фундаменте мощную машину, не совсем выверенную, фундамент придет при резонансе в сильные колебания, что чрезвычайно нежелательно. Закрепить фундамент невозможно. Но для его успокоения достаточно поставить на фундамент другую колебательную систему и подобрать ее период так, чтобы он совпадал с периодом внешней силы. Дополнительная система (маятник) при этом колеблется, но это нас мало беспокоит. Мы нашли „выход“ силе и таким образом освободили фундамент от колебаний.

Успокоение наступает при $p = n_2$. Если же p — одна из частот связи (нормальных частот), наступает резонанс. Если машина не имеет постоянного числа оборотов и если нормальные частоты близки к парциальным, то легко может наступить переход от успокоения к резонансу; при этом машина начнет сильно раскачивать фундамент.

Полное успокоение имеет место только при отсутствии затухания. Если есть малое затухание, то $\alpha \neq 0$, а только очень мало. Но при этом не так страшна неточность совпадения частот p и n_2. Введя затухание, мы понижаем эффект успокоителя, но зато делаем его менее чувствительным к изменениям периода внешней силы. Полный расчет здесь очень громоздок, и мы не будем его проводить.

Приведем два существенных применения изложенной теории.

1. Успокоитель качки судов. Судно на воде приходит в колебания. Давно возник вопрос о том, как их успокоить. Было предложено много решений. Вот принцип одного из них — успокоителя Фрама (1911 г.). Вода в резервуаре (рис. 110) — одна колебательная система, корабль — другая. На корабль действует периодическая сила. Период колебаний воды в резервуаре подобран так, что он приблизительно совпадает с периодом качки. Вода начинает очень сильно колебаться, но колебания корабля заметно успокаиваются. Колебания воды не создают никаких неприятностей.

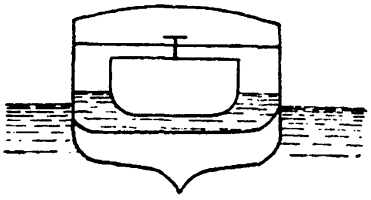


Рис. 110.

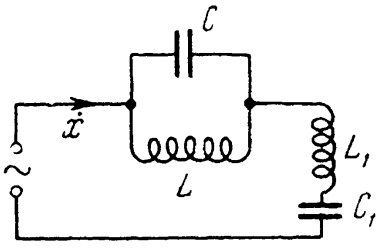


Рис. 111.

Конечно, волны не имеют какого-то одного определенного периода, и здесь нужно найти компромисс между степенью успокоения и нечувствительностью к периоду качки. Он достигается подбором затухания, которое регулируется открытием крана в трубе, через которую перекачивается воздух. Опыт дал благоприятные результаты.

2. „Пробка“ в электротехнике. В схеме рис. 111, если

$$p^2 = \frac{1}{LC}, \tag{1}$$

то ток $\dot{x}$ в цепи L_1, C_1 будет равен нулю. Если же равенство (1) нарушено, $\dot{x} \neq 0$. Контур LC обладает бесконечным сопротивлением для определенной частоты и запирает цепь для этой частоты.

Явление здесь сходно с резонансом. В контуре рис. 112, *а* случай (1), когда ток максимален, принято называть резонансом напряжений, так как на конденсаторе и катушке получаются большие напряжения (по сравнению с общим напряжением на клеммах). В случае же „пробки“ (рис. 112, *б*) говорят о резонансе токов, потому что ток в контуре LC имеет при условии (1) большую амплитуду (по сравнению с током в общей цепи). Эта теория очень проста, но простота куплена ценой отказа от рассмотрения

затухания. При проектировании действительных устройств нужно, конечно, учитывать затухание. Выясним, какие изменения оно внесет.

Без затухания мы получили $\alpha=0$, $\beta\neq 0$. Но если $\alpha=0$, то откуда берется энергия второго контура? Поскольку сопротивление отсутствует, нет ничего удивительного, что при *установившемся процессе* энергия во второй контур не поступает, — она в нем не потребляется.

Но пусть имеется сопротивление. Из математических соображений непрерывности можно заключить, что при достаточно малом сопротивлении ток мало отличен от того, который был бы без

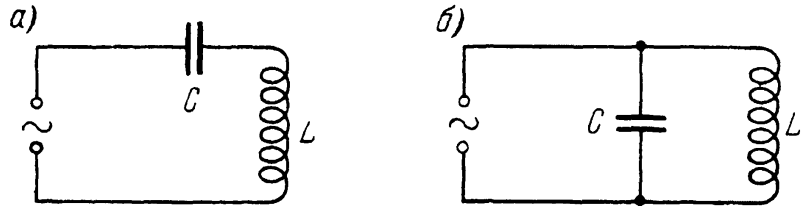


Рис. 112.

сопротивления. Пусть для простоты $L_1=0$, $C_1=\infty$ (рис. 111), т. е. речь идет о схеме рис. 112, *б*. Тогда амплитуда тока через C будет

$$I=pC\mathcal{E}. \qquad (2)$$

Если сопротивление мало, то ток через L имеет амплитуду, очень близкую к этому значению. Но теперь потребляется мощность $RI^2/2$. Она откуда-то поставляется. Это возможно только благодаря тому, что есть ток во внешней цепи. Этот ток — в фазе с электровозбудительной силой (что очень легко показать), а тогда легко видеть, чему он равен:

$$\frac{RI^2}{2}=\frac{I_0\mathcal{E}}{2},$$

или на основании (2)

$$I_0=\mathcal{E}\frac{RC}{L}.$$

При малом сопротивлении ток очень мал.

Таким образом, в действительности пробка имеет конечное сопротивление, которое тем больше, чем меньше R. Если R мало, действие пробки очень острое.

На примере успокоителей особенно ясно, насколько нужно быть осторожными в вопросе о том, что́ называть парциальными частотами. Если стремиться сохранить тот результат, что успокоение наступает тогда, когда внешняя частота равна собственной частоте парциальной системы, то нужно пользоваться тем определением последней, которое мы дали.

Собственные частоты системы инвариантны по отношению к выбору координат, и, следовательно, частоты, при которых наступает резонанс, не зависят от выбора координат. Частота успокоения зависит от того, *где*, в какой координате тушится колебание. При включении внешней силы в три разные ветви (рис. 113) успокоение будет наступать при трех различных частотах внешней силы. Каждый раз это будет собственная частота контура, получающегося, если разорвать ветвь, в которую включена внешняя сила.

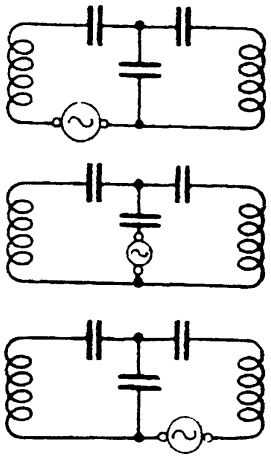


Рис. 113.

Это практическое приложение подтверждает целесообразность нашего определения парциальных систем.

Когда частота внешней силы совпадает с одной из нормальных частот, происходит сильное возбуждение колебаний, наступает резонанс. Здесь есть, однако, момент, существенно отличающий системы с двумя степенями свободы от системы с одной степенью свободы. В простом контуре при $p=\omega_0$ (ω_0 — собственная частота) резонанс не наступает, только если амплитуда внешней силы равна нулю. Точно так же при двух степенях свободы резонанса не будет ни при $p=\omega_1$, ни при $p=\omega_2$, если $X=Y=0$. Это — тривиальный случай. Но в случае двух степеней свободы есть еще другой, не тривиальный, случай отсутствия резонанса при $p=\omega_1$ или $p=\omega_2$, который специфичен для систем, имеющих больше чем одну степень свободы. Выясним, когда он наступает. Согласно уравнению (5) предыдущей лекции имеем:

$$\alpha=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} X & h-Hp^2 \\ Y & b-Bp^2 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Пусть p совпадает с одной из нормальных частот. Мы получаем резонанс ($\alpha=\infty$) в предположении, что детерминант в числителе не обращается в нуль. Если же он тоже равен нулю, т. е.

$$X(b-Bp^2)-Y(h-Hp^2)=0, \tag{4}$$

то α не обращается в ∞, резонанса не наступает. В случае свободных колебаний, если частота их равна p, отношение амплитуд есть

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{b - Bp^2}{h - Hp^2} = -\frac{h - Hp^2}{a - Ap^2}. \tag{5}$$

Таким образом, резонанс не наступает, несмотря на совпадение внешней частоты с нормальной частотой, если

$$X\alpha + Y\beta = 0, \tag{6}$$

где α и β — амплитуды обеих координат при соответствующем нормальном колебании.

Речь шла только об амплитуде α первой координаты. Но если p совпадает с нормальной частотой, то из (5) следует, что при условии (6) верхний детерминант в выражении для β тоже обращается в нуль и, следовательно, β также не обращается в ∞.

Мы можем рассматривать X и Y как компоненты вектора на плоскости, характеризующего распределение внешней силы, а α и β в формуле (5) — как компоненты вектора, определяющего форму нормального колебания. Условие (6) есть условие перпендикулярности (ортогональности) этих векторов. Таким образом, резонанс не наступает, если вектор, соответствующий силе, ортогонален к вектору, соответствующему собственному колебанию. В такой форме можно обобщить этот результат на n степеней свободы.

Можно избежать нежелательного резонанса, соответствующим образом распределяя искусственно силу между координатами. Для каждой нормальной частоты подбор распределения силы должен быть различным.

Все это имеет место в таком чистом виде, если нет затухания. При наличии малого затухания основные результаты — те же, но явления теряют остроту, смазываются. Резонанс устраняет бесконечности. В отсутствие затухания вычисления настолько проще, что лучше сначала все выяснить без затухания, а потом вносить поправки на затухание.

Для случая затухания уравнения Лагранжа нужно писать так:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = Q_i,$$

где Q_i — сумма обобщенных внешних сил и сил трения.

Релей обратил внимание на следующее. Для сил трения или сопротивления, зависящих от скоростей, существует во многих случаях так называемая *диссипативная функция*. Это такая функция $F(\dot{q}_1, q_2, \ldots, \dot{q}_n)$ обобщенных скоростей, удвоенное значение которой равно количеству энергии, рассеиваемой в единицу времени на трение. При этом силы трения таковы:

$$Q_i = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}.$$

Если мы найдем функцию F, то мы будем знать силы трения. Обычно можно узнать, какова эта функция, из физических соображений.

Возьмем в качестве примера два индуктивно связанных электрических контура. Здесь

$$2T = L_1\dot{q}_1^2 + L_2\dot{q}_2^2 + 2M\dot{q}_1\dot{q}_2,$$

$$2U = \frac{q_1^2}{C_1} + \frac{q_2^2}{C_2}.$$

Складывая потери в единицу времени в обоих контурах, получаем для диссипативной функции выражение

$$2F = R_1\dot{q}_1^2 + R_2\dot{q}_2^2.$$

Уравнения движения имеют теперь вид

$$\left.\begin{aligned} L_1\ddot{q}_1 + M\ddot{q}_2 + R_1\dot{q}_1 + \frac{q_1}{C_1} &= 0, \\ L_2\ddot{q}_2 + M\ddot{q}_1 + R_2\dot{q}_2 + \frac{q_2}{C_2} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Отличие от прежних уравнений в том, что теперь вошли первые производные $\dot{q}_1$ и $\dot{q}_2$. Раньше переменные входили или с двумя точками, или без точек, и мы могли положить:

$$q = A\cos(\omega t + \alpha),$$

заранее зная, что косинус сократится. Теперь так не получится. Но мы можем воспользоваться решением в виде экспоненциальной функции, так как при дифференцировании она себя повторяет. Будем искать решение в виде

$$q_1 = \alpha e^{mt}, \quad q_2 = \beta e^{mt}. \qquad (8)$$

Подставляя (8) в уравнения (7), получаем уравнения

$$\left.\begin{aligned}\left(L_1m^2+R_1m+\frac{1}{C_1}\right)\alpha+Mm^2\beta=0;\\ Mm^2\alpha+\left(L_2m^2+R_2m+\frac{1}{C_2}\right)\beta=0.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Здесь неизвестны α, β и m. По отношению к α и β эти уравнения линейны. Они имеют не тривиальное решение только тогда, когда равен нулю детерминант

$$\Delta=\begin{vmatrix} L_1m^2+R_1m+\frac{1}{C_2} & Mm^2 \\ Mm^2 & L_2m^2+R_2m+\frac{1}{C_2}\end{vmatrix}. \tag{10}$$

Развертывая детерминант, мы получаем для m уравнение четвертой степени:

$$m^4\left(1-\frac{M^2}{L_1L_2}\right)+m^3\left(\frac{R_1}{L_1}+\frac{R_2}{L_2}\right)+m^2\left(\frac{1}{L_1C_1}+\frac{1}{L_2C_2}+\frac{R_1R_2}{L_1L_2}\right)+$$
$$+m\left(\frac{R_1}{C_2}+\frac{R_2}{C_1}\right)\frac{1}{L_1L_2}+\frac{1}{L_1L_2C_1C_2}=0. \tag{11}$$

Когда нет трения, все просто: уравнение — биквадратное, оба его корня m^2 отрицательны, так как

$$1-\frac{M^2}{L_1L_2}>0,\quad \frac{1}{L_1C_1}+\frac{1}{L_2C_2}>0,\quad \frac{1}{L_1L_2C_1C_2}>0$$

и, следовательно,

$$m=i\omega,$$

где ω — действительная частота.

При наличии трения все очень усложняется. Решение уравнения четвертой степени — дело очень неприятное. Но сказать кое-что о корнях можно и не решая уравнения. Они — либо действительные, либо комплексные, попарно сопряженные. Если R_1 и R_2 малы, то корнями будут четыре комплексных величины:

$$m_1=\delta'+i\omega',\quad m_2=\delta'-i\omega',\quad m_3=\delta''+i\omega'',\quad m_4=\delta''-i\omega'',$$

так что частотное решение уравнений (7) имеет вид

$$q_1=\alpha'e^{\delta' t+i\omega' t},\quad q_2=\beta'e^{\delta' t+i\omega' t}.$$

Таким образом, если есть малое трение или сопротивление, то общее решение состоит из суммы двух колебаний с частотами ω' и ω'', с возрастающими или затухающими (смотря по знаку δ' и δ'') амплитудами. Весь вопрос в том, чтобы найти δ и ω. Для этого нужно решить уравнение (11). Найдя δ и ω, мы сможем из уравнений (9) определить α и β. Это нам даст величины

$$\frac{\beta}{\alpha} = k.$$

Здесь есть очень существенное отличие от случая отсутствия затухания. Там отношение k было действительной величиной, т. е. фаза нормального колебания в первой и второй координате была всегда одна и та же. Теперь отношение получается комплексным. Это означает, что есть сдвиг фаз между координатами.

Таким образом, в случае системы с трением или сопротивлением характерным является

1) затухание колебаний,

2) сдвиг фаз между колебаниями каждой из частот в обеих координатах.

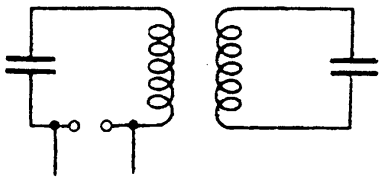


Рис. 114.

Было время, когда вопрос о затухающих колебаниях в системах с двумя степенями свободы стоял очень остро. В передатчиках использовали тогда собственные колебания связанных систем (рис. 114). Второй контур соответствует антенне. Когда искровой промежуток пробивается, контуры начинают колебаться, происходят затухающие колебания с двумя частотами. Важно было рассчитать, как зависят эти колебания от параметров контуров. Пользуясь тем, что сопротивления малы, находили приближенное решение. Теперь затухающими колебаниями почти не пользуются, и эти проблемы в значительной степени утратили интерес.

Я хотел бы обратить ваше внимание на то, как удается иногда обходить решение уравнений (ряд опытов приводит к вопросам, на которые можно ответить, не решая уравнений).

Часто важно знать интегральный эффект в первом или во втором контуре, например, какая рассеялась энергия

$$\int_0^\infty Ri^2 dt.$$

Можно найти этот интеграл, не решая уравнений. На этом примере мы увидим, в чем состоит метод.

Пусть, например, в начале ($t=0$) заряжен только первый контур и начальные условия таковы:

$$q_1 = q_{10}, \quad q_2 = 0, \quad i_1 \equiv \dot{q}_1 = 0, \quad i_2 \equiv \dot{q}_2 = 0. \tag{12}$$

Умножим первое уравнение (7) на $i_1 = \dot{q}_1$, второе — на $i_2 = \dot{q}_2$ и сложим, а затем проинтегрируем по t от 0 до ∞. Учитывая начальные условия (12), мы получаем:

$$\int_0^\infty R_1 i_1^2 dt + \int_0^\infty R_2 i_2^2 dt = \frac{q_{10}^2}{2C_1}.$$

Физический смысл здесь ясен: первоначально сообщенная энергия равна потребленной энергии. Интерес представляет применение этого метода к электродинамометру[1]. Если по обмоткам пропускаются токи i_1 и i_2, то вращательный момент пропорционален величине

$$\int_0^\infty i_1 i_2 dt.$$

Важно знать, при каких условиях этот момент будет равен нулю. Это будет, оказывается, при любых R_1 и R_2, если

$$L_1 C_1 = L_2 C_2.$$

Этот результат далеко не тривиален.

Ряд подобных вопросов удается решить именно таким способом. Очень часто при рассмотрении затухающих колебаний приходится пользоваться приближенными методами. Метод, о котором сейчас шла речь, является не приближенным, а точным.

Затухающие колебания отжили свой век в радиотехнике, но жаль забыть некоторые замечательные проблемы, на решение которых было затрачено много остроумия.

В самом начале в передатчиках применялся простой контур (рис. 115). Это очень невыгодно. Передатчик должен решать две задачи: первая — генерация, вторая — излучение. Их нерационально решать в одном контуре. Поэтому были введены системы с двумя

[1] [Ср. том I, стр. 173, а также 12-ю лекцию.]

степенями свободы (в одном из контуров можно создать большую емкость и накопить много энергии).

Энергия перекачивается из одного контура в другой, возникают два колебания с разными частотами. При приеме на резонанс это нежелательно. Требование техники состояло в том, чтобы избежать в таком передатчике „двуволнистости". Но она органически связана с наличием двух степеней свободы. Ф. Браун предложил остроумный метод. Его идея заключалась вот в чем: надо убрать первый контур в тот момент, когда вся энергия перекачается во второй. Но как это сделать? Много труда было затрачено на решение этой задачи. М. Бину удалось найти новое физическое явление, решившее вопрос.

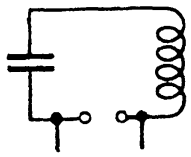


Рис. 115.

Вин создал очень малый разрядный промежуток, примерно в 0,1 мм. Когда в нем наступает пробой, он становится проводником. Но можно подобрать такие условия, при которых разрядный промежуток теряет свою проводимость, если ток становится очень слабым. Это достигается охлаждением. Тогда первый контур размыкается сам собой, автоматически, как только амплитуда его колебаний становится очень малой, и обратной перекачки энергии не происходит.

При этом среди радиоспециалистов возникли первые разговоры о проводниках, не подчиняющихся закону Ома. Уже здесь стало видно, насколько нелинейные системы — системы, не подчиняющиеся закону Ома, — существенны для радиотехники.

ДВАДЦАТЬ ВОСЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(6/IV 1931 г.)

Затухающие колебания системы с двумя степенями свободы. Оптические применения теории связанных колебаний. Примеры систем с бо́льшим числом степеней свободы. Самовозбуждение систем с произвольным числом степеней свободы; условия Раута—Гурвица. Случай кратных корней; ошибка Лагранжа.

Введем новые обозначения, которые нам понадобятся для систем с n степенями свободы. Будем обозначать координаты буквой q с индексом наверху, а нормальные колебания, как прежде, — индексом внизу.

Общее решение уравнений линейной системы с двумя степенями свободы с учетом затухания мы запишем теперь в таком виде:

$$q^{(1)} = R_1^{(1)} C_1 e^{-\delta_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1^{(1)} + \psi_1) + R_2^{(1)} C_2 e^{-\delta_2 t} \cos(\omega_2 t + \varphi_2^{(1)} + \psi_2);$$

$$q^{(2)} = R_1^{(2)} C_1 e^{-\delta_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1^{(2)} + \psi_1) + R_2^{(2)} C_2 e^{-\delta_2 t} \cos(\omega_2 t + \varphi_2^{(2)} + \psi_2).$$

Структура самой системы задает частоты и затухания колебаний, а также коэффициенты распределения амплитуд $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$ (они написаны теперь в нормировке, отличной от прежней) и сдвиги фаз $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ между координатами. Величины C_1, C_2, ψ_1, ψ_2 — произвольные постоянные, определяемые начальными условиями.

Существенно новое по сравнению с системой без затухания состоит здесь в том, что система задает сдвиги фаз между координатами.

Двадцать лет тому назад, до электронных ламп, когда приходилось работать с затухающими колебаниями, имело смысл подробно рассказывать о приближенных способах вычисления частот и затуханий в системе с двумя степенями свободы. Теперь это не имеет смысла, но несколько слов все же следует сказать.

Пусть у нас два индуктивно связанных контура со слабым затуханием. Частоты можно рассчитывать так, как будто нет затухания, так как оно влияет на частоты лишь во втором порядке. Затухание колебаний связанной системы зависит от затухания каждой парциальной системы в отдельности. При слабой связи величины δ_1 и δ_2 близки к тем затуханиям, которые каждый контур имел бы сам по себе. Когда связь сильна, положение несколько другое.

Задача о двух связанных системах имеет очень существенное значение в оптике.

Мы представляем себе, что в каждой молекуле газа находится оптический резонатор с определенной частотой ν. Свечение газа объясняется тем, что резонаторы колеблются с определенной частотой и газ испускает свет этой частоты.

Пусть теперь на газ падает извне световая волна. Под действием этой волны резонаторы приходят в колебания и поглощают энергию. Если период падающей волны и период собственных колебаний не совпадают, резонаторы колеблются слабо и поглощают мало. Если же периоды совпадают, то они колеблются

сильно (резонанс) и поглощают много энергии. В этом заключается смысл закона Кирхгофа.

Преломление объясняется следующим образом. Когда резонатор колеблется под действием падающей волны, то он сам излучает. То, что мы видим, — это тот свет, который прошел сквозь газ, плюс вторичное излучение, которое испустили резонаторы под влиянием падающего света. Если подсчитать результат такого сложения, то как раз получается правильное значение показателя преломления[1].

Как объяснить, что в плотном газе наблюдается расширение спектральных линий, расплывание частоты? Исходя из только что указанных представлений, мы получаем очень простой ответ: когда резонаторы сближены, они образуют связанную систему. Такая система имеет ряд различных нормальных частот. Частоты испускаемого света соответствуют этим нормальным частотам. Таким образом, сюда прямо переносится то, что мы знаем о связанных системах. В настоящее время известно, что модель простого классического резонатора здесь непосредственно неприменима; атом гораздо сложнее. Но все черты резонансной теории, в сущности, сохраняются и в современной теории. Поведение атома под действием внешней силы чрезвычайно близко к тому, что мы знаем из классической модели простого резонатора. Многие основные черты старой интерпретации дисперсии, абсорбции, испускания света сохранились и в новой теории.

Перейдем к системам с n степенями свободы ($n > 2$).

Вал с двумя шкивами[2] является системой с двумя степенями свободы, но в действительных машинах бывает большее число шкивов. Иногда говорят: зачем рассматривать общий случай n степеней свободы, — он практически не встречается, достаточно рассмотреть 2, 3, 4 степени свободы. Это неправильно. Есть много случаев, когда необходимо рассматривать большое число степеней свободы. Правда, в обычных передатчиках устройства, имеющие больше чем три контура, редко встречаются. Но в фильтрах бывает 5—10 ячеек.

Теория колебаний систем с n степенями свободы интересна, в частности, в связи с вопросами структуры твердых тел и в особенности кристаллов[3].

---

[1] [См. том I, стр. 112 и след.]

[2] [См. 24-ю лекцию.]

[3] [См. 29-ю и 30-ю лекции.]

Рассмотрим систему с n степенями свободы, характеризуемую тремя квадратичными формами: кинетической энергией, диссипативной функцией и потенциальной энергией:

$$\left.\begin{aligned} 2T &= \sum_{i,\,k} a_{ik}\dot{q}^{(i)}\dot{q}^{(k)}, \\ 2F &= \sum_{i,\,k} b_{ik}\dot{q}^{(i)}\dot{q}^{(k)}, \\ 2U &= \sum_{i,\,k} c_{ik}q^{(i)}q^{(k)}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

причем

$$a_{ik} = a_{ki}, \quad b_{ik} = b_{ki}, \quad c_{ik} = c_{ki}.$$

Уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{(i)}}\right) + \frac{\partial U}{\partial q^{(i)}} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^{(i)}} = 0 \quad (i = 1,2,\ldots, n)$$

(без внешних сил) для такой системы имеют вид

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\ddot{q}^{(k)} + b_{ik}\dot{q}^{(k)} + c_{ik}q^{(k)}) = 0 \quad (i = 1, 2,\ldots, n). \tag{2}$$

Требуется решить эту систему дифференциальных уравнений.

Сделав подстановку

$$q^{(k)} = A^{(k)}e^{\lambda t}, \tag{3}$$

мы получаем систему алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\lambda^2 + b_{ik}\lambda + c_{ik}) A^{(k)} = 0 \quad (i = 1, 2,\ldots, n). \tag{4}$$

Неизвестными являются λ и $A^{(k)}$. Система линейна и однородна по отношению к $A^{(k)}$. Она имеет решения, отличные от нуля, только если детерминант

$$\Delta(\lambda) = 0, \tag{5}$$

или более подробно

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11} & \ldots & a_{1n}\lambda^2 + b_{1n}\lambda + c_{1n} \\ a_{21}\lambda^2 + b_{21}\lambda + c_{21} & \ldots & a_{2n}\lambda^2 + b_{2n}\lambda + c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}\lambda^2 + b_{n1}\lambda + c_{n1} & \ldots & a_{nn}\lambda^2 + b_{nn}\lambda + c_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. только при определенных λ. Найдя корень детерминанта $\Delta(\lambda)$, мы подставим его в уравнения (4) и найдем затем значения всех $A^{(k)}$.

Уравнение (5) есть уравнение степени $2n$. Оно имеет $2n$ корней. Можно удовлетворить уравнениям движения (2), подставив в (4) первый корень уравнения (5) и найдя соответствующие $A^{(k)}$, а также подставив второй корень уравнения (5) и найдя соответствующие $A^{(k)}$, и т. д. Мы получим таким образом $2n$ частных решений системы (2):

$$q_1^{(k)} = A_1^{(k)} e^{\lambda_1 t}, \quad q_2^{(k)} = A_2^{(k)} e^{\lambda_2 t}, \ldots, \quad q_{2n}^{(k)} = A_{2n}^{(k)} e^{\lambda_{2n} t} \tag{6}$$

Если отдельные частные решения (6) линейно независимы, то общее решение будет

$$q^{(k)} = \sum_{i=1}^{2n} C_i A_i^{(k)} e^{\lambda_i t} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

где C_i — произвольные постоянные. (Общее решение системы $2n$ уравнений второго порядка содержит $2n$ независимых произвольных постоянных).

Система имеет n степеней свободы. Начальные условия задаются значениями n координат и n скоростей. В решении (7) можно подобрать C_i так, чтобы удовлетворить любым начальным условиям.

Кинетическая энергия всегда положительна; потенциальная энергия при колебаниях около устойчивого положения равновесия тоже положительна. Если колебания сопряжены с развитием тепла, то диссипативная функция тоже положительна.

Корни уравнения (5) могут быть действительными или комплексными. Так как коэффициенты уравнения (5) действительны, то комплексные корни являются попарно сопряженными. Можно доказать, что в случае, когда все три квадратичные формы (1) дефинитны и положительны, действительные корни отрицательны, а действительные части всех комплексных корней отрицательны или равны нулю.

Действительным корням соответствуют частные решения (3) вида

$$e^{-\delta t} \quad (\delta > 0),$$

т. е. апериодическое стремление координат к нулю.

Пусть уравнение (5) имеет комплексные корни

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= -\delta + i\omega,\\ \lambda_1^* &= -\delta - i\omega,\end{aligned}\right\} \quad (\delta > 0). \tag{8}$$

Если при $\lambda = \lambda_1$ уравнения (4) имеют решения $A^{(k)}$, то при $\lambda = \lambda_1^*$ они имеют решения $A^{(k)*}$. Поэтому частным решением уравнений (2) является действительная функция

$$q^{(k)} = \alpha A^{(k)} e^{(-\delta+i\omega)t} + \alpha^* A^{(k)*} e^{(-\delta-i\omega)t}, \tag{9}$$

где α — произвольная комплексная постоянная.

Пусть

$$\left.\begin{aligned}A^{(k)} &= R^{(k)} e^{i\varphi^{(k)}}, \quad R^{(k)} = |A^{(k)}|,\\ \alpha &= Ce^{i\psi}, \quad C = |\alpha|.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

В результате несложных выкладок из (9) и (10) получается

$$q^{(k)} = R^{(k)} C e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi^{(k)} + \psi).$$

Пусть все корни уравнения (5) комплексные. Тогда

$$q^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} R_j^{(k)} C_j e^{-\delta_j t} \cos(\omega_j t + \varphi_j^{(k)} + \psi_j) \tag{11}$$

есть общее решение системы (2), так как оно содержит $2n$ независимых произвольных постоянных C_j, ψ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Физический смысл его следующий: изменение каждой координаты есть сумма n колебаний, вообще говоря, затухающих. Абсолютные амплитуды и абсолютные фазы суть произвольные, зависящие от начальных условий, постоянные. Что же касается относительных амплитуд и фаз, то они строго определены самой системой. Часто забывают, что относительные фазы здесь задаются системой.)

То, что я здесь говорил о корнях уравнения (5), изложено в весьма изящной форме у Гельмгольца, в томе его „Теоретической физики“, посвященном акустике[1].

В настоящее время наибольший интерес для нас представляет вопрос совсем другого характера — вопрос о возникновении и самовозбуждении колебаний. Есть системы, для которых мы

[1] [H. v. Helmholtz. Vorlesungen über theoretische Physik, т. III, § 19 и § 21. Лейпциг, 1898.]

приходим к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, но где отнюдь не сказано, что происходят потери энергии: в этих системах могут быть и отрицательные сопротивления. Для схем, содержащих контуры и лампы, уравнение (5) может иметь положительные корни, а также комплексные корни с положительной действительной частью. Если хотя бы один корень λ положителен или имеет положительную действительную часть, состояние равновесия неустойчиво, система удаляется от него (самовозбуждается).

Поставим вопрос о том, каковы условия устойчивости и неустойчивости равновесия в системе, описываемой системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Это важно, в частности, для нахождения условий самовозбуждения лампового генератора, так как при учете сеточного тока задача уже не сводится на рассмотрение системы с одной степенью свободы [1].

Заметим, что положительная дефинитность функции F — достаточное, но не необходимое условие устойчивого равновесия системы, описываемой уравнениями (2).

Пусть дана система m линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. К такой системе можно привести нашу систему из линейных уравнений второго порядка, причем $m=2n$, где n — число степеней свободы. Решая ее подстановкой (3), мы придем к детерминантному уравнению m-ой степени, которое мы запишем теперь так:

$$a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \ldots + a_m = 0. \tag{12}$$

Требуется указать необходимые и достаточные условия того, чтобы все корни этого уравнения имели отрицательные действительные части (случай, когда действительная часть какого-нибудь корня равна нулю, мы не рассматриваем). Такой критерий существует. Он был дан сначала Раутом, а затем — в особо изящной форме — Гурвицем. Я приведу его без доказательства. Строгое доказательство имеется в ряде книг. Оно довольно длинное, хотя и значительно упрощено по сравнению с первоначальным.

Пусть

$$a_0 > 0.$$

---

[1] [См. 13-ю и 14-ю лекции.]

Это условие не нарушает общности, так как при $a_0 < 0$ мы можем умножить уравнение (12) на -1. Напишем детерминанты:

$$D_1 = a_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ldots \tag{13}$$

$$D_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \ldots 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \ldots 0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ a_{2m-1} & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & 0 \end{vmatrix}.$$

Элементы детерминантов с индексами, превышающими m, здесь надо полагать равными нулю (они вводятся для удобства записи и легкого запоминания).

Необходимое и достаточное условие того, что все корни уравнения (12) имеют отрицательные действительные части (сюда входят и действительные отрицательные корни), состоит в том, чтобы все эти детерминанты были положительны:

$$D_j > 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{14}$$

При развертывании детерминантов все сильно упрощается вследствие того, что многие элементы равны нулю.

Пусть, например, $m = 3$. Условия (13) принимают вид

$$a_1 > 0, \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \quad a_3 > 0.$$

В случае n степеней свободы характеристическое уравнение порядка $m = 2n$. Какому же физическому случаю соответствует $m = 3$? Случаю двух степеней свободы, из которых одна — вырожденная. Такой случай мы встречаем в простейшем генераторе (рис. 43), когда принимаем во внимание сеточный ток. Здесь можно говорить, что число степеней свободы равно полутора.

Если мы хотим получить самовозбуждение, то надо нарушить хотя бы одно из условий (13). Если мы хотим иметь усилитель, то ни одно из них не должно быть нарушено. Условия (13) используются также при исследовании вопросов устойчивости регуляторов. В сущности, там имеет место то же самое, что и в электри-

ческих усилителях. В настоящее время знание условий устойчивости (13) совершенно необходимо. Они завоевали огромное место в технических расчетах.

Вернемся к системе без затухания. Разберем вопрос, имеющий интересную историю, который часто ставит начинающих втупик. Его разъяснение имеет серьезное педагогическое значение. В общем решении

$$q^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} C_j A^{(k)} \cos(\omega_j t + \varphi_j) \tag{15}$$

уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\ddot{q}^{(k)} + c_{ik}q^{(k)}) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{16}$$

имеется $2n$ произвольных постоянных. Они определяются из уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} (-\omega^2 a_{ik} + c_{ik}) A^{(k)} = 0. \tag{17}$$

Пусть детерминантное уравнение для ω^2 имеет равные корни; например

$$\omega_1 = \omega_2.$$

Тогда

$$C_1 A_1^{(k)} \cos \omega_1 t + C_2 A_2^{(k)} \cos \omega_2 t = (C_1 + C_2) A_1^{(k)} \cos \omega_1 t.$$

Эта уже не сумма двух независимых решений. C_1 и C_2 теперь не независимые произвольные постоянные интеграции. Если два корня равны, то теряется одна постоянная интегрирования, а это значит, что (15) не есть общее решение. Каково же теперь общее решение? На этот вопрос Лагранж дал следующий ответ: в случае, когда имеется два равных корня $\omega_1 = \omega_2$, уравнения (16) имеют еще частное решение вида

$$t \cos \omega_1 t;$$

если имеется три равных корня $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$, система (16) имеет решение, содержащее член с множителем t^2, и т. д. При этом Лагранж сказал примерно следующее: так как этот вопрос нас не очень интересует, то мы не будем в него углубляться.

На то, что утверждение Лагранжа ошибочно, указал Вейерштрасс. Дело заключается вот в чем. В случае кратных корней

характеристического уравнения система вида (16) имеет „обычно" решение с множителями t, t^2 и т. д. Но мы имеем дело с *особым* случаем системы линейных дифференциальных уравнений: вследствие того, что система (16) происходит от дифференцирования квадратичных форм, она обладает определенными свойствами симметрии ($a_{ik}=a_{ki}$, $c_{ik}=c_{ki}$). В этом особом случае система дифференциальных уравнений имеет *и при наличии кратных корней* уравнения для ω^2 *только* решение вида $\cos\omega t$.

Но как же в таком случае получить при наличии кратных корней частные решения в достаточном числе для построения общего решения? Ответ здесь такой.

В случае простого корня ω_1, если выбрана одна из амплитуд $A_j^{(k)}$, скажем $A_1^{(k)}$, то все остальные $A^{(k)}$ этим вполне определены. Но система линейных однородных уравнений, детерминант которой равен нулю, однозначно определяет отношения неизвестных не всегда, а только если не все миноры этого детерминанта равны нулю. Поясним это на примере.

Рассмотрим систему ($n=3$)

$$a_1x+b_1y+c_1z=0,$$

$$a_2x+b_2y+c_2z=0,$$

$$a_3x+b_3y+c_3z=0.$$

Пусть детерминант системы равен нулю. Если не все миноры равны нулю, то третье уравнение есть следствие первых двух и первые два уравнения однозначно определяют отношения x/z, y/z. Если же все миноры равны нулю, то второе и третье уравнения являются следствием первого, и, таким образом, мы имеем для трех неизвестных одно уравнение. Можно задать произвольно *две* из величин x, y, z.

Именно такой случай имеет место для системы (17) при подстановке в нее значения ω^2, являющегося кратным корнем ее детерминантного уравнения. Здесь можно задать произвольно две амплитуды, скажем $A_1^{(1)}$ и $A_1^{(2)}$. Благодаря этому получается требуемое число постоянных интегрирования.

ДВАДЦАТЬ ДЕВЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(Апрель 1931 г.)

Системы со многими степенями свободы, кратные корни (повторение). Использование симметрии для отыскания формы и частоты колебаний. Введение в теорию кристаллических решеток. Квантовая теория теплоемкости кристаллов. Работа Эйнштейна. Приближенный прием Дебая. Решение дискретной задачи Борном и Карманом. Одномерная модель кристалла, состоящего из двух сортов атомов. Дебаевский и борновский спектры.

Повторим сначала несколько общих замечаний, относящихся к системам с n степенями свободы. Мы имели:

$$\sum_{k=1}^{n} (-\omega^2 a_{ik} + c_{ik}) A^{(k)} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Эти n линейных однородных уравнений для $A^{(k)}$ определяют собственные колебания: собственные частоты и типы колебаний (относительное распределение амплитуд для всех координат). Уравнения (1) имеют не тривиальные решения только тогда, когда детерминант

$$|-\omega^2 a_{ik} + c_{ik}| = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) для ω^2 имеет n корней (n собственных частот). Если все корни различны, то каждой частоте соответствуют вполне определенные отношения амплитуд $A^{(k)}$. Амплитуды определяются в этом случае системой с точностью до произвольного постоянного множителя.

Но может быть и так, что уравнение (2) имеет равные корни. Вообще говоря, в этом случае постоянных $A^{(k)}$ нехватает для построения общего решения той системы дифференциальных уравнений, из которых получилась система (1). Но для интересующих нас систем, если детерминант имеет двойной корень, то этот корень обращает в нуль также миноры $(n-1)$-го порядка. Это значит, что независимых соотношений для $A^{(k)}$ имеется не $n-1$, а только $n-2$. Следовательно, отношения амплитуд не определены однозначно. При кратном корне получается произвол, „степень“ которого равна кратности корня.

Умножим каждое из уравнений (1) на $A^{(i)}$ и просуммируем их; это дает:

$$\omega^2 \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} A^{(i)} A^{(k)} - \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} A^{(i)} A^{(k)} = 0,$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{U(A^{(i)}, A^{(k)})}{T(A^{(i)}, A^{(k)})}. \tag{3}$$

Вообще говоря, формула (3) не избавляет от необходимости решать детерминантное уравнение. Для того, чтобы вычислить ω по формуле (3), нужно в нее подставить такие значения $A^{(i)}$ и $A^{(k)}$, которые удовлетворяют уравнениям (1), а обычно их можно узнать, лишь решив уравнение (2).

Но из свойства собственных частот, выражаемого формулой (3), можно сделать много различных выводов. Она позволяет установить некоторые законы, которым удовлетворяет расположение корней детерминантного уравнения. Она дает качественные ответы на вопрос о том, как меняются частоты в зависимости от условий задачи (я имею в виду теоремы Куранта). Это очень важно, так как решать уравнения n-ой степени чрезвычайно неприятно.

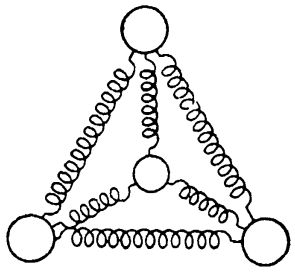


Рис. 116.

Теоремы Куранта хорошо изложены[1]. Те вещи, о которых будет идти речь дальше, менее доступны: они разбросаны по разным местам.

Иногда удается найти распределение амплитуд сразу, т. е. не решая уравнения (2). Тогда с помощью (3) можно очень просто определить частоты. Поясним это на примере (рис. 116). Эта модель не совсем выдумана. Примерно так сейчас представляют себе ячейку решетки кальцита CO_3. Высокая степень симметрии настолько облегчает здесь решение задачи, что можно получить ответ без всяких вычислений.

Если уравнение (2) имеет корень n-ой кратности, т. е. существует *единственная* частота, этот корень обращает в нуль миноры всех порядков, до элементов детерминанта включительно. Из того, что при некотором значении ω все элементы детерминанта обращаются в нуль, следует, что

$$\frac{a_{ik}}{c_{ik}} = \text{const}.$$

---

[1] [Р. Курант и Д. Гильберт. Методы математической физики, гл. 1, § 4. 3-е изд., М., 1951.]

для всех значений i и k. Такое соотношение между кинетической и потенциальной энергией возможно, если

1) совсем нет связей между координатами,

2) имеются как инерционные, так и упругие связи.

Следовательно, если имеются связи, но только одного типа, то не может быть корня n-ой кратности.

Модель, изображенная на рис. 116, имеет три колебательные степени свободы. Тройной корень невозможен, так как имеется только один тип связи. Следовательно, имеется по крайней мере один простой корень.

Пусть при некотором нормальном колебании

$$\frac{A_1}{A_2}=k_2,\quad \frac{A_1}{A_3}=k_3. \tag{4}$$

В силу симметрии системы возможно нормальное колебание той же частоты, при котором

$$\frac{A_2}{A_1}=k_2, \tag{5}$$

и нормальное колебание той же частоты, при котором

$$\frac{A_3}{A_1}=k_3. \tag{6}$$

Для *простого* корня отношение амплитуд однозначно определено, и, следовательно, распределения (4) — (6) должны совпадать. Это возможно, только если $k_2=k_3=1$. Итак, для простого корня обязательно

$$A_1=A_2=A_3.$$

Так как согласно (3) отношения амплитуд однозначно определяют частоту, имеется *только один* простой корень. Следовательно, имеется еще двойной корень.

Какое возможно соотношение между амплитудами в случае двойного корня? Только такое:

$$A_1+A_2+A_3=0. \tag{7}$$

Докажем это.

Предположим, что имеет место соотношение

$$kA_1+A_2+A_3=0.$$

Тогда вследствие симметрии должно иметь место также

$$A_1+kA_2+A_3=0.$$

Но для двойного корня существует *единственное* линейное соотношение между амплитудами и, следовательно, $k=1$.

Соотношению (7) удовлетворяют, например, значения

$$A_1=0, \quad A_2=-A_3.$$

Подставляя эти значения в уравнение (3), мы найдем частоту.

Совершенно то же самое можно сказать о симметричной системе из трех колебательных контуров (рис. 117).

Рассмотрим теперь принципиально важную группу вопросов, касающихся систем с n степенями свободы:

1) динамику кристаллической решетки;

2) техническую задачу о фильтрах;

3) переход от дискретных к сплошным системам.



Рис. 117.

Начнем с применения общих соображений о системах с n степенями свободы к кристаллическим решеткам. Изложение будет вестись на самых простых примерах.

Мы представляем себе кристалл следующим образом. В узлах решетки находятся атомы. Атомы связаны между собой. Вся система может находиться в устойчивом равновесии. Если сжать кристалл, а затем отпустить, он приходит в колебания. Это — колебания системы с n степенями свободы около устойчивого положения равновесия. В первом приближении система описывается квадратичными формами, т. е. получается задача о колебаниях *линейной* системы с n степенями свободы. Число атомов в кристалле обычных размеров — порядка 10^{24}. Число степеней свободы — того же порядка. Если бы не было далеко идущей симметрии, если бы в кристалле не повторялись одинаковые ячейки, то решить задачу было бы невозможно. Мы можем ее решить только благодаря симметрии.

Если ударить по кристаллу, возникают акустические колебания. Они состоят из n независимых (нормальных) колебаний. Тепловое движение кристалла — это *те же* колебания. Заслуга Дебая состоит в том, что он увидел, что тепловое движение кристалла — это упругие колебания, но только очень быстрые. Они являются суперпозицией собственных (нормальных) колебаний решетки.

Раньше к задаче о колебаниях кристалла подходили так: рассматривали кристаллы как континуум, вводили такие понятия, как плотность и упругие постоянные, и получали для кристалла уравне-

ние в частных производных. Его гораздо легче решить, чем систему, состоящую из очень большого числа обыкновенных дифференциальных уравнений. В действительности кристалл не является сплошным, и поэтому такое „сплошное" рассмотрение не может дать всего. К тепловым колебаниям так подходить нельзя.

Теория тепловых колебаний кристаллов была поставлена на вычислительную почву в связи с вопросом о теплоемкости твердых тел.

Вначале теория теплоемкости кристаллов строилась так. Каждый атом рассматривался как осциллатор с тремя степенями свободы, т. е. как три осциллатора. Таким образом, в кристалле, содержащем n атомов, имеется $3n$ осциллаторов. Средняя энергия теплового движения каждого осциллатора равна kT (k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура). Поэтому полная средняя энергия теплового движения

$$W = 3nkT.$$

Нельзя себе представлять, что в кристалле имеется $3n$ осцилляторов, колеблющихся с одинаковой частотой. Если осциллаторы связаны, то имеется $3n$ нормальных колебаний *различной* (вообще говоря) частоты. На каждое нормальное колебание приходится по классической статистике одинаковая энергия kT, независимо от его частоты. Акустические колебания — сравнительно медленные; частоты тепловых колебаний очень велики (в них ν доходит до 10^{13}). Но раньше, в классической статистике, не нужно было интересоваться частотами, ибо, повторяю, в ней энергия, приходящаяся на каждое колебание, не зависит от частоты.

Опыт не подтверждает той зависимости энергии от температуры, которую дает классическая теория.

Эйнштейн первый указал на то, что здесь нужно *отбросить* классику, что резонатор, в согласии с теорией Планка, имеет среднюю энергию, равную не kT, а

$$w = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

(h — постоянная Планка). Эта величина очень сильно зависит от ν. Поэтому для того, чтобы вычислить теплоемкость по квантовой теории, необходимо знать частоты колебаний кристалла.

Эйнштейн решил задачу просто. Он подобрал разумным образом некоторую среднюю частоту ν. Основные противоречия были

устранены, но полученная таким образом формула не очень хорошо совпадала с опытом. Теория была явно недостаточна.

Мысль о том, что нужно перейти к планковской теории, была огромным шагом вперед. Но для того, чтобы подсчитать теплоемкость, нужно учесть, что в кристалле имеются колебания с совершенно различными частотами. Как рассчитать эти частоты? За эту задачу взялся Дебай в 1912 г. Он сделал явно неправильную, но гениальную вещь.

Будем рассматривать кристалл как сплошное тело. Будем говорить для простоты о стержне в одном измерении (не о цепочке из n частиц, а о макроскопическом стержне). Вычислим частоты его собственных колебаний.

Пусть l — длина стержня, ρ — плотность, E — модуль Юнга. Тогда скорость распространения звука

$$v=\sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

длины волн

$$\lambda_s=\frac{2l}{s},$$

где s — целые числа, и для частот мы получаем:

$$\omega_s=2\pi\frac{v}{\lambda_s}=\frac{s\pi}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{8}$$

Вот что дает теория сплошных систем.

Но колебания с малым s, т. е. длинные акустические волны в кристалле, — заведомо такие, которые дает теория сплошных систем. Забудем, что кристалл имеет структуру, и напишем для него формулу (8). Сплошной стержень имеет бесчисленное множество таких собственных колебаний ($s=1, 2, \ldots, \infty$). Если рассчитать теплоемкость по такой модели, получается очень плохой результат.

То, что сделал Дебай, сводится к следующему. Кристалл имеет $N=3n$ колебаний. Вычислим частоты по формуле для сплошной среды, но возьмем только первые $3n$ частот, первые $3n$ колебаний и *отбросим остальные*. Это смело и заведомо неправильно, но это исключительно сильный прием. Дебай так сделал и сумел разрубить узел.

Теория Дебая была первой серьезной теорией теплоемкости кристалла. Дебай получил для ряда тел замечательно хороший

результат. Но, как мы скоро увидим, есть такие случаи, когда теория Дебая не дает совпадения с опытом.

За проблему теплоемкости кристаллов взялись также Борн и Карман. Они решили взять быка за рога, просчитать собственные колебания кристаллической решетки, найти частоты и типы колебаний, рассматривая дискретную решетку как таковую, не сводя ее к континууму.

Решение этой задачи можно довести до конца в силу высокой симметрии. При этом получаются принципиальные отличия от



Рис. 118.

сплошной среды — качественное своеобразие, обусловливающее ряд явлений.

Рассмотрим простую одномерную модель (рис. 118) — цепочку частиц (атомов), связанных одинаковыми пружинами. Если атомы одинаковы, то результат Дебая довольно хорошо подходит; различие между дискретной системой и континуумом скрыто. Но предположим, что в цепочке чередуются два сорта атомов, имеющих различные массы (рис. 119). Этого достаточно для того, чтобы выяснить все принципиальные, основные вопросы, связанные с различием между дискретной системой и континуумом.

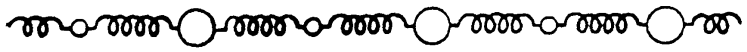


Рис. 119.

Пусть все четные массы равны M, все нечетные — m. Пусть α — постоянная пружины (при удлинении ее на Δl возникает сила $-\alpha\Delta l$). Пусть расстояние между соседними атомами равно d.

Для того, чтобы сравнивать результаты, которые мы получим для цепочки, с тем, что дает теория сплошного стержня, нужно будет принять во внимание следующее.

Пусть E — модуль Юнга цепочки. Тогда, очевидно,

$$\alpha = \frac{E}{d}. \tag{9}$$

Пусть далее ρ — масса цепочки на единицу длины (линейная плотность). Масса всей цепочки (длина ее l) равна

$$n(M+m) = \rho l \tag{10}$$

(n — число частиц каждого сорта). С другой стороны,

$$l = 2nd. \tag{11}$$

Мы считаем здесь n настолько большим, что можно пренебречь отличием между $2n$ и $2n+1$ (следует заметить, что такое пренебрежение даже при очень большом n допустимо не во всех вопросах). Из соотношений (10) и (11) следует, что

$$\rho = \frac{n(M+m)}{l} = \frac{M+m}{d}. \tag{12}$$

Пусть $x^{(k)}$ — координаты атомов первого сорта, $y^{(j)}$ — координаты атомов второго сорта. Нумеровать атомы мы будем подряд, так что k будет пробегать все нечетные, а j — все четные значения. Концы цепочки будем считать закрепленными. Мы могли бы считать, что k принимает значения $1, 3, \ldots, 2n-1$, а j — значения $2, 4, \ldots, 2n$; но уравнения будут гораздо более симметричны, если координаты закрепленных точек мы назовем $y^{(0)}$ и $x^{(2n+1)}$. У нас будет при этом уже не $2n$, а $2n+2$ частиц и столько же координат. Так как концы закреплены, мы потребуем, чтобы было

$$y^{(0)} = 0, \quad x^{(2n+1)} = 0. \tag{13}$$

Потенциальная энергия U состоит из энергий отдельных пружин

$$2U = \alpha[(y^{(0)} - x^{(1)})^2 + (x^{(1)} - y^{(2)})^2 + (y^{(2)} - x^{(3)})^2 + \ldots]. \tag{14}$$

Для кинетической энергии T имеем:

$$2T = m[(\dot{x}^{(1)})^2 + (\dot{x}^{(3)})^2 + \ldots] + M[(\dot{y}^{(2)})^2 + (\dot{y}^{(4)})^2 + \ldots]. \tag{15}$$

Уравнения движения могут быть получены с помощью выражений (14) и (15) (как уравнения Лагранжа). Они могут быть получены также с помощью элементарных механических соображений, учитывающих силы.

Для k-го атома массы m имеем:

$$m\ddot{x}^{(k)} + \alpha\{2x^{(k)} - [y^{(k-1)} + y^{(k+1)}]\} = 0 \quad (k = 1, 3, \ldots, 2n+1). \tag{16}$$

Для j-го атома массы M имеем:

$$M\ddot{y}^{(j)} + \alpha\{2y^{(j)} - [x^{(j-1)} + x^{(j+1)}]\} = 0 \quad (j = 0, 2, 4, \ldots, 2n). \tag{17}$$

Всех уравнений движения $2n+2$.

Казалось бы, особенных успехов мы не достигли: нужно решить систему из 10^{24} уравнений! Но здесь будет видна мощь применения индексов. Ничтоже сумняшеся, полагаем:

$$x^{(k)} = A^{(k)} \cos(\omega t + \varphi),$$
$$y^{(j)} = B^{(j)} \cos(\omega t + \varphi)$$

(так мы делаем всегда, когда ищем решение уравнений дискретной линейной консервативной системы со многими степенями свободы). Мы получаем:

$$\left.\begin{aligned} (2\alpha - m\omega^2) A^{(k)} - \alpha [B^{(k-1)} + B^{(k+1)}] = 0; \\ -\alpha [A^{(j-1)} + A^{(j+1)}] + (2\alpha - M\omega^2) B^{(j)} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Мы превратили, таким образом, $2n+2$ дифференциальных уравнений во столько же алгебраических уравнений для $A^{(k)}$ и $B^{(j)}$. Но можно свести определение $2n+2$ величин $A^{(1)}, A^{(3)}, \ldots, B^{(2)}, B^{(4)}, \ldots$ к определению всего лишь *двух* величин. Это делается с помощью очень красивого приема (не знаю, как до него дошли). Полагаем:

$$\left.\begin{aligned} A^{(k)} = a \sin k\beta; \\ B^{(j)} = b \sin j\beta. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Можно так распорядиться величинами a, b и β (если мы правильно подберем ω, т. е. частоту), что выражения (19) будут решением системы алгебраических уравнений (18).

Подставляем (19) в (18). Получаем:

$$(2\alpha - m\omega^2) a \sin k\beta - \alpha b [\sin(k-1)\beta + \sin(k+1)\beta] = 0,$$
$$-\alpha a [\sin(j-1)\beta + \sin(j+1)\beta] + (2\alpha - M\omega^2) b \sin j\beta = 0,$$

или

$$\left.\begin{aligned} [(2\alpha - m\omega^2) a - 2\alpha \cos\beta \cdot b] \sin k\beta = 0, \\ [-2\alpha \cos\beta \cdot a + (2\alpha - M\omega^2) b] \sin j\beta = 0. \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Наша подстановка (19) будет удовлетворять уравнениям (20) при любых k и j, если

$$\left.\begin{aligned} (2\alpha - m\omega^2) a - 2\alpha \cos\beta \cdot b = 0, \\ -2\alpha \cos\beta \cdot a + (2\alpha - M\omega^2) b = 0. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Мы сделали огромный шаг вперед. Нужно было решить систему алгебраических уравнений (18) с очень большим числом неизвест-

ных. Мы ищем их в виде (19). Здесь зависимость неизвестного от его номера j или k заключена под знаком синуса. При подстановке (19) в (18) j и k выпадают, и мы получаем, вместо $2n+2$ уравнений, *два* уравнения (21). Это оказалось возможным потому, что все уравнения (16) и все уравнения (17) имеют одинаковую структуру.

Но прежде, чем решать уравнения (21), нужно определить величину β. Вспомним для этого, что концы цепочки закреплены. Это выражается условиями (13). Подставляя в (19) $j=0$, мы видим, что первое из этих условий уже выполнено. Остается подобрать β так, чтобы было выполнено также второе условие (13). Для этого должны быть

$$(2n+1)\beta = s\pi,$$

где s — произвольное целое число, или

$$\beta = \frac{s\pi}{2n+1}. \tag{22}$$

Получается бесчисленное множество возможных значений β. Легко видеть, что значениям β, получающимся при $s=1, 2, \ldots, n$, соответствуют *различные* решения уравнений (21), а значениям, получающимся при $s=n+1, n+2, \ldots$, соответствуют решения уравнений (21), повторяющие те, *которые* получаются при $s=1, 2, \ldots, n$[1].

Подставляя значения β, соответствующие $s=1, 2, \ldots, n$, в уравнения (21), мы будем каждый раз получать для определения частот детерминантное уравнение

$$\begin{vmatrix} 2\alpha - m\omega^2 & -2\alpha\cos\beta \\ -2\alpha\cos\beta & 2\alpha - M\omega^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{23}$$

Это — квадратное уравнение относительно ω^2. Для каждого заданного β оно дает два значения ω^2, т. е. две различные частоты. Мы получаем всего $2n$ различных частот. Так как число степеней свободы равно $2n$, больше требовать ничего нельзя, — мы нашли *все* частоты.

---

[1] [Подробнее см. 30-ю лекцию.]

Обозначим через $x_s^{(k)}$ и $y_s^{(j)}$ смещения k-ой и j-ой точки при определенном s. Тогда

$$x_s^{(k)} = a_s \sin \frac{ks\pi}{2n+1} \cos(\omega_s t + \varphi_s),$$

$$y_s^{(j)} = b_s \sin \frac{js\pi}{2n+1} \cos(\omega_s t + \varphi_s).$$

Для каждого s имеется две частоты ω_{s1} и ω_{s2} и соответственно два значения отношения b/a. Для того, чтобы найти эти значения, нужно решить систему уравнений (21) при $\omega = \omega_{s1}$ и $\omega = \omega_{s2}$. Для амплитуд имеем:

$$A_s^{(k)} = a_s \sin \frac{ks\pi}{2n+1}, \quad B_s^{(j)} = b_s \sin \frac{js\pi}{2n+1}.$$

Рассматриваемые колебания продольны, но представим себе, что мы отложили смещения, как ординаты, против точек, где расположены массы. Для данного s все массы каждого сорта располагаются в любой момент времени по синусоиде. Длина волны синусоиды определяется числом s. Например, для $s=1$ на цепочке укладывается полволны.

В случае континуума точки также располагаются по синусоидам. Но между полученной здесь картиной и тем, что дает „непрерывная“ теория, есть принципиальная разница. В случае континуума каждой длине волны соответствует *одна* частота. В нашей дискретной системе для каждого s, для каждой длины волны имеется *два* нормальных колебания — две частоты и два распределения амплитуд. Это — замечательное обстоятельство.

ТРИДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(6/V 1931 г.)

Одномерная модель кристалла, состоящего из двух сортов атомов (продолжение). Подробное исследование типов колебаний и строения спектра. Акустические и внутримолекулярные колебания. Принципиальное отличие от теории, не учитывающей атомистическую структуру. Переход к случаю, когда все атомы имеют одинаковую массу. Задача об электрических фильтрах.

В прошлой лекции мы начали разбирать одномерную модель кристаллической решетки, состоящей из чередующихся частиц (атомов) двух сортов. Конечно, реальная решетка — трехмерна, но основные, характерные черты можно увидеть и на одномерной

решетке. (Аналогичная задача — поперечные колебания струны с грузами, рис. 120.)

Мы написали для каждого сорта частиц по уравнению — представителю:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}^{(k)} + \alpha(2x^{(k)} - y^{(k+1)} - y^{(k-1)}) = 0 \quad (k = 1, 3, \ldots, 2n-1), \\ M\ddot{y}^{(j)} + \alpha(2y^{(j)} - x^{(j+1)} - x^{(j-1)}) = 0 \quad (j = 0, 2, 4, \ldots, 2n), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

всего $2n+2$ уравнений (по числу частиц).

Уравнения (1) имеют один и тот же вид для каждого атома каждого сорта, за исключением первого и последнего уравнений, в которых отсутствуют соответственно члены $y^{(k-1)}$ и $x^{(j+1)}$.

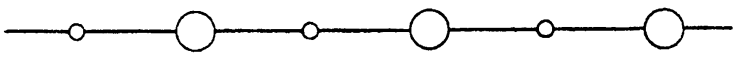


Рис. 120.

Аналогично тому, как это всегда делается при рассмотрении сплошных сред, мы вводим краевые или граничные условия. Для этого мы добавляем две новые координаты $y^{(0)}$ и $x^{(2n+1)}$. Тогда для $x^{(1)}$ и $y^{(2n)}$ получаются такие же уравнения, что для остальных $x^{(k)}$ и $y^{(j)}$, но мы требуем дополнительно — и в этом состоят краевые условия, — чтобы было

$$y^{(0)} = 0, \quad x^{(2n+1)} = 0. \quad (2)$$

Итак, мы добились того, что все уравнения (1) для $k = 1, 3, \ldots, 2n-1$, а также для $j = 0, 2, 4, \ldots, 2n$. тождественны, но зато ввели краевые условия.

Мы взяли специальный случай, когда концы (крайние частицы слева и справа) закреплены. Закрепить концы реального кристалла не так просто. Физический смысл закрепленных концов — заделка концов кристалла в иную, намного более жесткую среду. Можно было бы взять другие специальные случаи граничных условий, например случай свободных концов. Можно считать приближенно, что концы свободны, если кристалл намного жестче, чем ограничивающая его среда.

Необходимо заметить, что главные интересующие нас здесь свойства колебаний кристаллической решетки *не зависят* от граничных условий.

Решение задачи (1), (2) лобовым методом, приводящее к секулярному уравнению $2n$-го порядка, очень громоздко. Мы применили особый прием, сделав для амплитуд $A^{(k)}$ и $B^{(j)}$ координат $x^{(k)}$ и $y^{(j)}$ подстановку

$$A^{(k)} = a \sin k\beta, \quad B^{(j)} = b \sin j\beta, \tag{3}$$

и получили для a, b и ω уравнения:

$$\left.\begin{aligned} (2\alpha - m\omega^2)\, a - 2\alpha \cos\beta \cdot b = 0; \\ -2\alpha \cos\beta \cdot a + (2\alpha - M\omega^2)\, b = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Если мы найдем такие a, b и ω, которые удовлетворяют этим двум уравнениям, то подстановка (3) удовлетворит всем $2n$ уравнениям (1) при любом β. Остается удовлетворить граничным условиям (2).

Мы могли бы заменить в (3) синусы на косинусы. Это также привело бы к решению уравнений (1), но не позволило бы удовлетворить граничным условиям. Тем, что мы взяли синусы, мы уже удовлетворили первому граничному условию. Для того, чтобы удовлетворить второму, нужно взять для β одно из значений

$$\beta = \frac{s\pi}{2n+1} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Для каждого s имеется *два* значения ω_s, определяемые уравнениями (4). Обозначим меньшее из этих значений через ω_{s1}, большее — через ω_{s2}. Для того, чтобы решить задачу до конца, нужно для каждого s вычислить ω_{s1} и ω_{s2}, а затем найти из (4) соответствующие им значения отношения a/b. Но основное свойство этого отношения можно вывести, не проводя вычисления частот ω_{s1} и ω_{s2}. Это свойство состоит в том, что отношение a/b положительно для $\omega = \omega_{s1}$ и отрицательно для $\omega = \omega_{s2}$. Действительно, из уравнений (4) имеем:

$$\frac{a}{b} = \frac{2\alpha \cos\beta}{2\alpha - m\omega^2}. \tag{6}$$

Уравнения (4) имеют такой же вид, как уравнения системы с двумя степенями свободы, причем величины

$$n_1 = \sqrt{\frac{2\alpha}{M}}, \quad n_2 = \sqrt{\frac{2\alpha}{m}} \tag{7}$$

играют роль парциальных частот (для любого s). Следовательно, если $M \neq m$, то [1]

$$\omega_{s1}^2 < n_1^2 < n_2^2 < \omega_{s2}^2. \tag{8}$$

Перепишем (6) в таком виде:

$$\frac{a}{b} = \frac{2\alpha}{m} \frac{\cos\beta}{n_2^2 - \omega^2}. \tag{9}$$

Подставляя в (9) $\omega = \omega_{s1}$ и $\omega = \omega_{s2}$, принимая во внимание неравенства (8), а также то, что согласно (5) $\cos\beta_s > 0$, получаем:

$$\frac{a_{s1}}{b_{s1}} > 0, \qquad \frac{a_{s2}}{b_{s2}} < 0.$$

Таким образом, колебания с частотой ω_{s1} происходят так, что все массы — и большие и малые — смещаются одновременно в *одну*

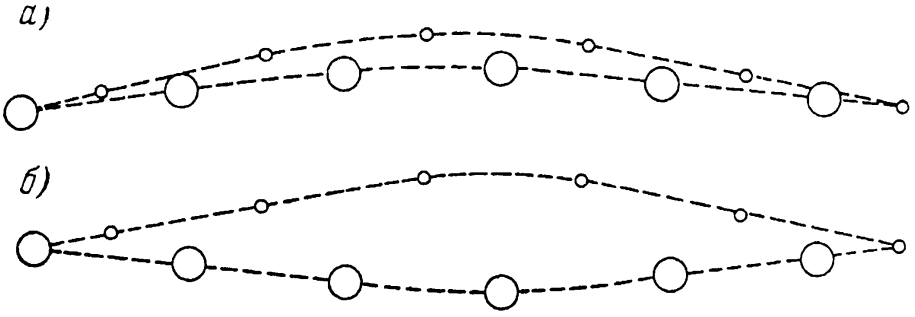


Рис. 121.

сторону, а колебания с частотой ω_{s2} — так, что одновременно смещения больших и малых масс направлены в *разные* стороны.

Для того, чтобы наглядно себе представить картину колебания всей цепочки, отложим амплитуды по оси ординат. Для a_{s1} и b_{s1} мы получим синусоиды, обращенные всюду в одну и ту же сторону (например, для $s = 1$ — рис. 121, *а*). Для a_{s2} и b_{s2} мы получим сунусоиды, обращенные всюду в противоположные стороны (для $s = 1$ — рис. 121, *б*).

Расстояние между частицами, совершающими одинаковое движение, мы будем называть длиной волны (оно и соответствует тому, что принято называть длиной волны). Мы можем теперь сказать, что каждой длине волны соответствуют два типа колебаний.

При колебаниях *первого* типа (частота ω_{s1}) синусоиды, изображающие колебания частиц обоих сортов, колеблются синфазно.

[1] [См. 23-ю лекцию.]

При этом частицы одного сорта колеблются немного слабее, частицы другого сорта — немного сильнее. В случае колебаний *второго* типа (частота ω_{s2}) обе синусоиды колеблются в противофазе.

Не следует забывать, что в действительности колебания продольны. Полученная картина означает следующее.

Колебания ω_{s1}. Здесь смещения соседних частиц происходят в одном и том же направлении. При этом меняется количество частиц на единицу длины, т. е. макроскопическая плотность. Таким образом, колебания с частотами ω_{s1} — это *обычные акустические колебания*.

Колебания ω_{s2}. Смещения соседних частиц происходят в противоположных направлениях. При этом типе колебаний *нет* заметного макроскопического изменения плотности. Это — *внутримолекулярные колебания*.

Перейдем к вычислению частот (напомним, что в вопросе о теплоемкости после того, как пришлось отказаться от равномерного распределения энергии по степеням свободы, стало важно знать частоты колебаний кристаллической решетки).

Для того, чтобы найти ω_{s1} и ω_{s2} для определенного s, надо решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 2\alpha - m\omega^2 & -2\alpha\cos\beta_s \\ -2\alpha\cos\beta_s & 2\alpha - M\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$Mm\omega^4 - 2\alpha(M+m)\omega^2 + 4\alpha^2\sin^2\beta_s = 0,$$

т. е. квадратное уравнение для ω^2, напоминающее секулярное уравнение для линейной консервативной системы с двумя степенями свободы. Решая это уравнение, находим:

$$\omega_s^2 = \alpha\frac{M+m\pm\sqrt{(M+m)^2-4Mm\sin^2\beta_s}}{Mm} \qquad (s=1, 2, \ldots, n) \qquad (10)$$

(такое простое выражение для частоты получается лишь в случае одномерной решетки. В случае пространственной решетки вычисление частот гораздо сложнее).

Кристалл имеет огромное число частот — порядка 10^{23}. Фактически нам нужно знать не каждую частоту в отдельности, а закономерности в *распределении* частот. Набор частот принято называть спектром. Нам нужно выяснить, каков *спектр* нашей одномерной цепочки. Для этой цели мы найдем более простое

выражение, воспользовавшись тем, что n — очень большое число.

Из формулы (10) видно, что с увеличением s бо́льшая частота ω_{s2} уменьшается, а меньшая частота ω_{s1} увеличивается. Таким образом, $s=1$ дает самую низкую и самую высокую частоту, $s=2$ дает две более близкие частоты и т. д.

Рассмотрим очень длинные волны, т. е. очень малые s. Для малых s величины β_s, а следовательно, и $\sin\beta_s$, очень малы. Здесь приближенно

$$\sqrt{(M+m)^2-4Mm\sin^2\beta_s}\approx(M+m)\left[1-\frac{2Mm}{(M+m)^2}\sin^2\beta_s\right]. \quad (11)$$

Не трудно видеть, что то же приближение справедливо для любых β_s, если m мало по сравнению с M (в случае очень длинных волн, т. е. достаточно малых s и β_s, выражение (11) приближенно справедливо для любых M и m).

Напишем, используя (11), приближенные выражения для частот. Для второй частоты мы можем в первом приближении отбросить второй член формулы (11). Это приближение годится для длинных волн, а также для любых волн при большой разности масс. Мы получаем на основании (10):

$$\omega_{s1}^2=\frac{2\alpha\sin^2\beta_s}{M+m}, \quad \omega_{s2}^2=\frac{2\alpha(M+m)}{Mm}. \quad (12)$$

Самое существенное в излагаемой теории заключается в том, что при *одной и той же длине волны* мы имеем *две* частоты, которые для $M\gg m$ сильно отличаются друг от друга. Колебание с малой частотой — акустическое колебание. Колебание с большой частотой — внутримолекулярное колебание. Это разделение колебаний на два типа специфично для дискретной решетки и совершенно чуждо сплошной системе (вполне понятно, что в сплошной системе нет внутримолекулярных колебаний).

Спектр частот нашей дискретной решетки состоит из двух ветвей: ветви низких частот, которую называют *акустическим* или дебаевским спектром, и ветви высоких частот, которую называют *оптическим* (инфракрасным) или борновским спектром.

Рассмотрим теперь самые короткие волны, для которых s близко к n. Для них из точной формулы (10) имеем с очень хорошим приближением:

$$\omega_{n1}^2=\frac{2\alpha}{M}, \quad \omega_{n2}^2=\frac{2\alpha}{m}. \quad (13)$$

Действительно, при большом n

$$\beta_n = \frac{n\pi}{2n+1} \approx \frac{\pi}{2},$$

откуда $\sin^2 \beta_n = 1$, и, следовательно,

$$\sqrt{(M+m)^2 - 4Mm \sin^2 \beta_n} = M - m.$$

Подставляя это значение в (10), получаем (13).

Нарисуем диаграмму распределения частот, расположив их в порядке возрастания их величины, т. е. введя надлежащую новую нумерацию частот (рис. 122).

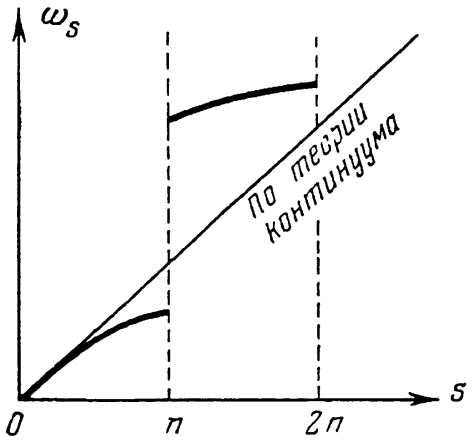


Рис. 122.

Если масштаб выдержан (n очень велико, порядка 10^{24}), то первые частоты (ω_{s1} для малых s) очень малы, так как очень малы величины $\sin \frac{s\pi}{2n+1}$, и практически кривая начинается с нуля. Так как для достаточно малых s с хорошим приближением

$$\omega_{s1} = \sqrt{\frac{2\alpha}{M+m}} \frac{s\pi}{2n+1} = \varkappa s \qquad (14)$$

($\varkappa$ — постоянная), то вначале кривая не отличима от прямой. Если $M \gg m$, то приближенно

$$\omega_{12} - \omega_{n2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\alpha}{m}} \cdot \frac{m}{M},$$

и вся вторая половина диаграммы лежит в узкой полоске, параллельной оси абсцисс.

То, что при $M \gg m$ в цепочке из двух сортов масс все частоты борновского спектра приблизительно одинаковы, легко видеть и непосредственно. При $M \gg m$ в дебаевском спектре большие массы колеблются и увлекают малые, а в борновском спектре большие массы почти покоятся. Здесь можно считать (приближенно), что n частиц колеблются независимо и, следовательно, с равными частотами. Аналогичное рассмотрение применимо в случае, когда ячейки состоят из трех частиц, одна из которых обладает гораздо большей массой, чем две другие.

Таким образом, спектр состоит из двух ветвей, не соприкасающихся между собой, если $M \neq m$. Одна ветвь начинается практически с нуля. Другая ветвь, соответствующая более высоким частотам, не является простым продолжением первой. Наличие этих двух ветвей — это то основное и замечательное, что характерно для дискретной теории.

Посмотрим теперь:

1) дает ли дискретная теория те результаты, которые правильно отображает теория сплошных сред;

2) что в дискретной теории чуждо обычной теории сплошных сред.

Для макроскопических свойств — модуля Юнга (коэффициента упругости) E и плотности ρ — имеем [1]:

$$E = \alpha d, \quad \rho = \frac{M+m}{2d},$$

откуда

$$\frac{E}{\rho} = \frac{2\alpha d^2}{M+m}. \tag{15}$$

Теория сплошных сред утверждает, что звуковые (упругие) колебания распространяются в стержне со скоростью

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{16}$$

Вдоль стержня укладывается целое число полуволн, т. е.

$$s\frac{\lambda_s}{2} = l,$$

причем

$$\omega_s = \frac{2\pi v}{\lambda_s}.$$

Принимая во внимание (16), получаем:

$$\omega_s = \frac{s\pi}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

С другой стороны, формула (14), полученная из дискретной теории, в сочетании с формулой (15) для перехода от микроскопического рассмотрения к макроскопическому для низких частот дает:

$$\omega_s = \sqrt{\frac{2\alpha}{M+m}} \cdot \frac{s\pi}{2n+1} = \sqrt{\frac{2\alpha d^2}{M+m}}\,\frac{s\pi}{l} = \frac{s\pi}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

[1] [См. 29-ю лекцию.]

Таким образом, значения начальных частот дебаевского спектра, получающиеся из дискретной теории, совпадают с теми, какие известны из теории континуума. Но *продолжение* акустического спектра, даваемое теорией континуума, неправильно. Теория континуума дает прямую, которая идет выше, чем нужно (рис. 122).

Итак, акустическая ветвь спектра, даваемого дискретной теорией, практически (до определенного числа s) совпадает с тем, что дает „сплошная" теория. Не удивительно, что во всех акустических вопросах (λ значительно больше d) для кристаллической решетки оказывается справедливым обычное континуальное рассмотрение. Но для более частых колебаний теория континуума приводит к неправильному результату.

В борновском спектре имеется предельная частота, определяемая второй формулой (12). Она не зависит от длины стержня. Можно доказать, что она не зависит также от способа закрепления концов. Таким образом, существует некоторая предельная частота, к которой близки частоты очень большого числа колебаний, характеризующая свойства самой решетки. В первом приближении, если $M \gg m$, можно считать, что все частоты борновского спектра одинаковы и равны предельной частоте.

Вспомним, что Дебай, для того чтобы получить спектр дискретной решетки, оборвал спектр континуума на $s = 2n$. Мы видим теперь, что это неверно: частоты решетки не совпадают с частотами континуума. Отличие не очень велико в тех случаях, которые были количественно просчитаны Дебаем (массы M и m близки между собой), и поэтому он получил хороший результат. Но если бы Дебай взял случай, когда $M \gg m$, он получил бы сильное расхождение между своей теорией и тем, что дает дискретное рассмотрение.

Как уже было сказано, частоты второй ветви сгущаются в конце и приближаются к определенной предельной частоте, не зависящей от n и характерной для решетки. С другой стороны, уже давно известны так называемые остаточные лучи. Если на кристалл падает инфракрасный свет, то определенные частоты очень сильно поглощаются и очень сильно отражаются, тогда как остальные частоты почти нацело проходят. Те лучи, которые сильно отражаются и поглощаются, и называются остаточными (это название связано с тем, что после многих отражений остаются только эти лучи). Их частоты совпадают с предельными частотами кристаллов:

вследствие резонанса на этих частотах получается сильное поглощение и селективное отражение.

Пусть кристалл состоит не из двух, а из трех различных сортов атомов (рис. 123). Тогда спектр состоит из *трех* ветвей (рис. 124). Правая часть спектра — дебаевская, вторая и третья — борновские. Здесь имеется два сорта остаточных лучей. Если бы

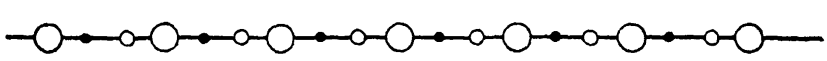


Рис. 123.

было четыре сорта частиц, то было бы три сорта остаточных лучей, и т. д.

Исследуя на опыте частоты остаточных лучей, мы получаем для них значения, очень близкие к тем значениям предельных частот, которые можно вычислить по Борну. Таким образом, экспериментальное исследование динамики кристалла чрезвычайно хорошо оправдывает представление о его дискретном строении. Рентгеновы лучи подтвердили дискретное представление о *статике* кристалла. Мы получили теперь подтверждение этих представлений из *динамического* рассмотрения: те свойства, о которых мы здесь говорили, специфичны для *колебаний* дискретной структуры. Но я не хотел бы, чтобы вы это понимали упрощенно.

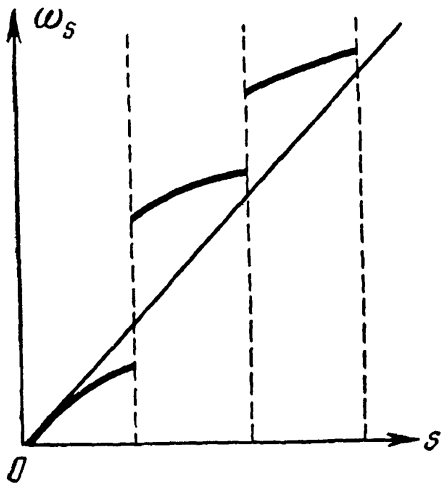


Рис. 124.

Экспериментальные факты решают спор между дискретным представлением о строении кристалла и тем „сплошным“ представлением, которое принимается в теории упругости. Рассмотрение кристалла как *однородного* стержня приводит к некоторым результатам, находящимся в противоречии с опытом. Но представим себе другую сплошную модель кристалла. Пусть масса „размазана“ с *переменной* плотностью. Пусть распределение массы обладает *периодичностью*, причем период — молекулярного размера и на каждый период приходится два максимума плотности различной высоты (рис. 125). Я думаю, что если построить теорию колебаний в такой среде, получится практически то же самое, что дает дискретная модель с двумя сортами

частиц. (Такое динамическое рассмотрение еще не проведено, хотя уже имеются некоторые работы о сплошной среде с периодической структурой.)

Опыты, о которых здесь шла речь, опровергают не *всякое* представление о кристалле, как о сплошной среде, а представление о кристалле, как о сплошной *однородной* среде (лишенной периодичности молекулярных размеров).

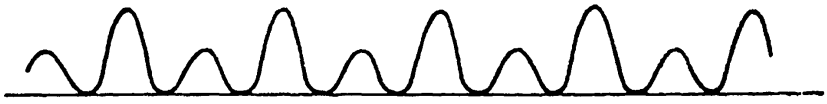


Рис. 125.

Изучение динамики связанных систем привело нас к вопросам строения вещества. Мы встречаем здесь те же идеи, что и в теории „технических" связанных систем, но только иначе примененные. Динамика кристаллической решетки интересует нас еще и в связи с тем, что мы старались с ее помощью оптически уловить строение вещества[1].

Вернемся к техническим системам. Рассмотрим фильтр (рис. 126) — электрический аналог одномерной кристаллической решетки с одинаковыми массами. Двум различным массам M и m соответствовал бы фильтр с двумя различными чередующимися индуктивностями. На практике применяют фильтры, состоящие из одинаковых ячеек, но фильтры с чередующимися ячейками двух сортов также могут пригодиться.

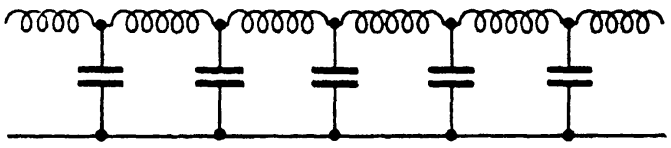


Рис. 126.

Однако, прежде чем приступить к задаче о фильтре, разберем переход к случаю равных масс в задаче о кристаллической решетке. Переход этот довольно интересен.

При $M=m$ формула (10) сильно упрощается и дает:

$$\omega_{s_1}^2 = \frac{4\alpha}{m}\sin^2\frac{\beta_s}{2}, \quad \omega_{s2}^2 = \frac{4\alpha}{m}\cos^2\frac{\beta_s}{2}. \tag{17}$$

Вместо того, чтобы исходить из теории, построенной для двух сортов масс, мы можем поступить иначе: считать с самого начала,

[1] [Ср. том I, стр. 320, 327.]

что все массы одинаковы, и написать и решать уравнения одного типа для всех масс от $k=1$ до $k=2n$. Тогда вместо двух выражений для частоты получается *одно* и ее номер s изменяется от 1 до $2n$. При этом нет никакого деления на спектры Дебая и Борна, каждой длине волны соответствует одна частота. А именно, если с самого начала решать задачу для $M=m$, то все частоты выражаются формулой

$$\omega_s^2=\frac{4\alpha}{m}\sin^2\frac{\beta_s}{2} \quad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n), \tag{18}$$

а распределения амплитуд — формулой

$$A_s^{(k)}=a_s\sin k\beta_s \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n), \tag{19}$$

причем

$$\beta_s=\frac{s\pi}{2n+1} \quad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n). \tag{20}$$

Легко убедиться, что формулы (17) и (18) дают один и тот же спектр частот для $s=1, 2, \ldots, n$. Формула (18) совпадает с первой формулой (17), а для $s=n+1, n+2, \ldots, 2n$ из формулы (18) получается то же, что и из второй формулы (17) для $s=n, n-1, \ldots, 2,1$.

Несколько сложнее обстоит дело с типом колебаний. Когда в формуле (20) s меняется от 1 до $2n$, длины волн становятся все короче и короче. Для первого типа колебаний все в порядке: синусоиды, определяемые формулами (19) и (20) для $s=1, 2, \ldots, n$, совпадают с синусоидами, которые дают при $M=m$ формулы (3), (6) и (9) (здесь $a=b$). Но для второго типа колебаний на первый взгляд получается противоречие. Когда мы исходим из нашего *первого* способа рассмотрения, полагая затем $M=m$, то мы получаем *две* синусоиды одинаковой амплитуды, но противоположной фазы ($b=-a$). На одной синусоиде лежат все четные массы, на другой — все нечетные. Если же мы пользуемся *вторым* способом рассмотрения, с самого начала полагая $M=m$, то массы оказываются расположенными на *одной* синусоиде (19). Противоречие разрешается следующим образом. Физический смысл имеют не все ординаты синусоид, а только те, которые соответствуют точкам, где расположены атомы. Но для этих точек формулы (3) и (19) дают одно и то же, т. е. соответствующие им ординаты синусоид (3) являются вместе с тем ординатами синусоиды (19). Покажем это.

Колебанию $\omega_{s2}(s=1, 2, \ldots, n)$, получаемому при первом способе рассмотрения, соответствует при втором способе рассмотрения колебание $\omega_{s'}$, где $s'=2n, 2n-1, \ldots, n+1$, т. е.

$$s'=2n+1-s.$$

Оно имеет согласно (19) и (20) распределение вида

$$A_{s'}^{(k)}=a\sin k\beta_{s'}=a\sin\frac{ks'\pi}{2n+1}=(-1)^k\left(-a\sin\frac{ks\pi}{2n+1}\right)$$

$$(k=0, 1, 2, \ldots, 2n),$$

или, если ввести для нечетных k обозначение j,

$$A_{s'}^{(j)}=a\sin\frac{js\pi}{2n+1} \qquad (j=1, 3, \ldots, 2n+1),$$

$$A_{s'}^{(k)}=-a\sin\frac{ks\pi}{2n+1} \qquad (k=0, 2, 4, \ldots, 2n).$$

Эти выражения совпадают с теми, которые получаются из (3 при $b=-a$.

Итак, частицы одновременно лежат на двух синусоидах (3) и на одной, более частой, синусоиде (19) (рис. 127). Вопрос пол-

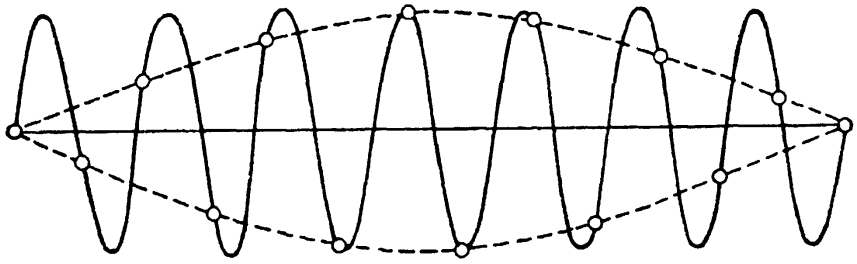


Рис. 127.

ностью разъяснен. При обоих способах рассмотрения получаются лишь различные выражения одинаковых результатов.

В случае фильтра с равными ячейками магнитная и электрическая энергия определяются выражениями:

$$2T=\sum_k L(\dot{q}^{(k)})^2, \quad 2U=\sum_k\frac{(q^{(k)}-q^{(k+1)})^2}{C}.$$

Из них получаются, в качестве уравнений Лагранжа, такие же уравнения, как для решетки, с заменой α на $1/C$, $m=M$ — на L и x на q:

$$L\ddot{q}^{(k)}+\frac{1}{C}(2q^{(k)}-q^{(k+1)}-q^{(k-1)})=0 \quad (k=1, 2, \ldots, n). \qquad (21)$$

Само собой разумеется, уравнения (21) являются для соответствующих обходов ячеек обыкновенными кирхгофовскими уравнениями.

Итак, мы получаем тот же самый вид уравнений, что для цепочки из одинаковых масс.

Однако здесь нас интересуют главным образом другие вопросы. В отличие от кристаллической решетки, основной интерес здесь представляют не собственные колебания системы, а то, как она ведет себя в качестве линии передачи.

Отметим еще и другое отличие. В случае электрического фильтра число звеньев обычно не очень велико: не более 20—30. В случае кристаллической решетки мы пренебрегаем единицей по сравнению с числом звеньев. Здесь нужно быть осторожнее.

В электротехнике представляет интерес не только фильтр сам по себе, но также фильтр как модель кабеля. Здесь положение в некотором смысле противоположно тому, какое было с кристаллами. В теории кристаллов мы начали с континуума. Потом, чтобы быть ближе к природе, пришлось перейти к решетке. Кабель можно считать континуумом: здесь нас интересуют волны, не имеющие отношения к молекулярным размерам. Но все-таки и для кабеля имеет смысл рассматривать дискретную модель, и вот почему. Пусть, например, кабель имеет длину 200—300 км. Такой кабель очень трудно исследовать в натуре. Поэтому часто требуется создать лабораторную модель кабеля. Электрические свойства кабеля определяются его емкостью, индуктивностью, сопротивлением. При воссоздании кабеля в лаборатории нельзя заменить его одним контуром с емкостью и индуктивностью, равными емкости и индуктивности кабеля. Это ничего не даст: в кабеле возможен ряд явлений, чуждых цепи с одной степенью свободы. Но можно сделать искусственный кабель из *ряда* дискретных сосредоточенных емкостей и индуктивностей, общая емкость и индуктивность которых такие же, как у настоящего кабеля. Подобный искусственный кабель легко построить. Возникает вопрос: насколько он может воспроизводить свойства настоящего кабеля? Оказывается, что достаточно небольшого числа ячеек, чтобы получить очень хорошую апроксимацию. Если мы берем модель кабеля из 30—40 ячеек, имеющих такую же общую емкость и такую же общую индуктивность, как кабель, то

$$\omega / \omega_{40} = 0{,}9997$$

(ω — основная частота кабеля; ω_{40} — основная частота цепочки из сорока звеньев). Следующие частоты, по крайней мере ближайшие, тоже при этом хорошо апроксимируются.

ТРИДЦАТЬ ПЕРВАЯ ЛЕКЦИЯ

(8/V 1931 г.)

Фильтры (продолжение). Задача о собственных колебаниях; граничные условия. Апроксимация кабеля одной ячейкой и многими ячейками. Фильтр как передающая система. Критическая частота; условия пропускания. „Обратный" фильтр. Физическое объяснение действия фильтров. Вычисление напряжения на конце фильтра в области пропускания. Резонанс.

Продолжим исследование фильтра с одинаковыми ячейками. Он описывается уравнениями

$$L\ddot{q}^{(k)} + \frac{1}{C}\left(2q^{(k)} - q^{(k+1)} - q^{(k-1)}\right) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Для определенности задачи нужно указать условия на концах. Закрепленным концам механической цепочки здесь соответствуют открытые концы:

$$q^{(0)} = 0, \quad q^{(n+1)} = 0.$$

Совершенно так же, как для цепочки, имеем:

$$\begin{gathered} q^{(k)} = A^{(k)} \cos(\omega t + \varphi); \\ \left(\frac{2}{C} - L\omega^2\right) A^{(k)} - \frac{1}{C}\left(A^{(k+1)} + A^{(k-1)}\right) = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Пусть

$$A^{(k)} = a \sin k\beta. \tag{3}$$

Тогда

$$\begin{gathered} q_s^{(k)} = a \sin k\beta_s \cos(\omega_s t + \varphi_s), \\ \omega_s = \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin \frac{s\pi}{2(n+1)} \quad (s = 1, 2, \ldots, n). \end{gathered} \tag{4}$$

Эти формулы получаются из формул для цепочки из одинаковых масс, если сделать замены

$$\alpha = \frac{1}{C}, \quad m = L.$$

Задача о собственных колебаниях полностью решена.

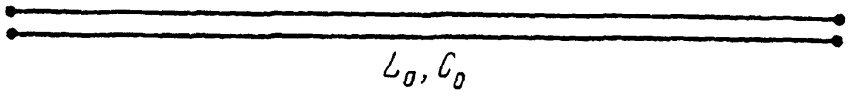


Рис. 128.

Если вместо (3) взять $A^{(k)} = b\cos k\beta$ (с тем же самым β), мы также получим решение уравнений (2). Сумма решений

$$A^{(k)} = a\sin k\beta + b\cos k\beta \tag{5}$$

— тоже решение. Здесь неизвестны β и отношение b/a. Их нужно определить из двух краевых условий. Мы сразу взяли $b = 0$, так как заранее было известно, каким краевым условиям придется удовлетворять (мы имеем право угадывать решение, потому что знаем, что оно единственное). При других, более сложных, краевых условиях понадобилось бы использовать решение (5).

Пусть имеется кабель с равномерно распределенными емкостью и индуктивностью и с открытыми концами (рис. 128). Как апроксимировать его одной ячейкой (первое самое грубое приближение)? Сделаем, например, так, как показано на рис. 129: индуктивность, равная всей индуктивности кабеля L_0, сосредоточена в одном месте, а емкость, равная всей емкости кабеля C_0, разделена на две части. Здесь — одна собственная частота. Ее можно сравнивать только с *основной* частотой кабеля $\tilde{\omega}_1$.

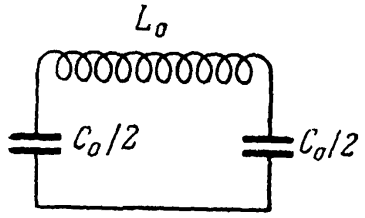


Рис. 129.

Если L_1 и C_1 — индуктивность и емкость на единицу длины кабеля, то скорость распространения волн в нем равна $1/\sqrt{L_1C_1}$[1]. Так как кабель открыт на обоих концах, то на его длине l укладывается полволны и

$$\tilde{\omega}_1 = 2\pi\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}\cdot\frac{1}{2l} = \frac{\pi}{l\sqrt{L_1C_1}} = \frac{\pi}{\sqrt{L_0C_0}}.$$

[1] [См. 3-ю лекцию части II.]

Контур рис. 129 имеет собственную частоту

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{L_0 C_0}},$$

сильно отличающуюся от $\tilde{\omega}_1$. Но и при одной ячейке можно получить лучшее приближение, если иначе распределить параметры. Прежде чем это показать, рассмотрим апроксимацию кабеля фильтром из n ячеек. Чем больше n, тем лучшее приближение можно получить.

Повидимому, наилучший способ распределения индуктивности и емкости кабеля между n ячейками состоит в следующем. Разобьем кабель на $n+1$ участок. Поместим в середине каждого участка

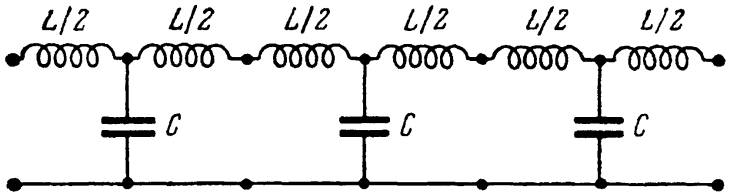


Рис. 130.

сосредоточенную емкость C, равную емкости участка, а слева и справа от нее две индуктивности $L/2$, равные в сумме распределенной индуктивности участка (рис. 130). Из $n+1$ участка получается n ячеек. Сумма емкостей всех ячеек равна емкости всего кабеля. С индуктивностью дело обстоит иначе: половинки $L/2$ на концах остаются „мертвыми“. Емкость C_0 и индуктивность L_0 всего кабеля связаны с C и L соотношениями:

$$C(n+1) = C_0, \quad L(n+1) = L_0.$$

Собственные частоты нашего ячеечного кабеля (фильтра) суть

$$\omega_s = \frac{2(n+1)}{\sqrt{L_0 C_0}} \sin \frac{s\pi}{2(n+1)},$$

собственные же частоты сплошного кабеля —

$$\tilde{\omega}_s = \frac{s\pi}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\omega_s}{\tilde{\omega}_s} = \frac{2(n+1)}{s\pi} \sin \frac{s\pi}{2(n+1)},$$

или

$$\frac{\omega_s}{\tilde{\omega}_s}=\frac{\sin\xi}{\xi}, \qquad \xi=\frac{s\pi}{2(n+1)}$$

(функция $\sin\xi/\xi$ часто встречается в теоретической физике).

Для ячеечных кабелей, подобранных только что указанным способом, имеются таблицы собственных частот.

В случае апроксимации *одной* ячейкой ($n=1$) наш общий способ приводит к схеме рис. 131. Здесь, в отличие от рис. 129, в выражение для собственной частоты входит не вся индуктивность кабеля, а ее половина. Получается собственная частота

$$\omega=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{L_0C_0}}.$$

Она отличается от основной частоты сплошного кабеля только на 10%.

Мы говорили выше об индуктивности и емкости *на единицу длины кабеля*. Эти понятия нуждаются в обосновании, и в свое время мы к этому вернемся[1]. Теперь же мы перейдем к рассмотрению другой физической задачи, практически чрезвычайно важной.

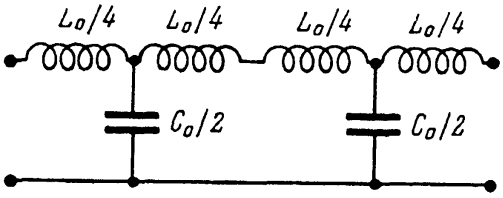


Рис. 131.

Пусть через звеньевой проводник передается напряжение от источника к потребляющему аппарату. Практически дело часто обстоит так: источник создает не синусоидальное напряжение, а набор синусоидальных слагаемых разнообразных частот. Желательно, чтобы некоторые из этих слагаемых проходили, а другие задерживались. Иначе говоря, нужно *профильтровать* напряжение, создаваемое источником. Так как мы рассматриваем линейную систему, то для того, чтобы овладеть проблемой, достаточно рассмотреть, как ведет себя эта система под действием синусоидальной силы

$$\mathcal{E}=\cos pt,$$

где p — заданная частота.

Ответ будет различным, в зависимости от того, каков потребляющий аппарат. Оставим конец фильтра открытым и будем интересоваться напряжением на этом открытом конце. Если на конце

[1] [См. 3-ю лекцию части II.]

включен какой-нибудь аппарат, то, вообще говоря, вся картина искажается. Но если этот аппарат имеет большое внутреннее сопротивление, то решение, которое мы получим для открытого конца, даст практически правильный ответ.

Вернемся к общей постановке задачи. Это — задача не о собственных, а о *вынужденных* колебаниях.

Реальный фильтр обладает потерями. Вследствие потерь собственные колебания затухают, и под действием периодической силы устанавливаются колебания с периодом силы. Их мы и хотим найти. Наличие затухания мы учтем с самого начала тем, что будем рассматривать периодическое решение. Но, не вводя затухания в уравнение, мы не получим зависимости амплитуды вынужденных колебаний от затухания. Так можно поступать только в том случае, когда затухание мало.

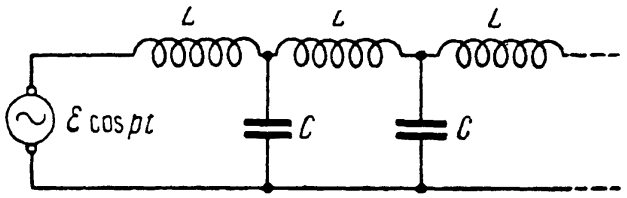


Рис. 132.

Будем искать периодическое решение с частотой p. Прибегнем к тому же приему, что и при изучении собственных колебаний[1]. В случае, когда включен источник внешней силы (рис. 132), первое уравнение (1) должно быть заменено уравнением

$$L\ddot{q}^{(1)} + \frac{1}{C}(q^{(1)} - q^{(2)}) = \mathcal{E}\cos pt.$$

Остальные уравнения (1) сохраняют такой же вид, как в задаче о собственных колебаниях. Получаются несимметричные уравнения, и это нежелательно. Но как сохранить для всех k, включая $k=1$, одинаковый вид уравнений? Выход заключается в следующем: нужно написать для $k=1$ уравнение

$$L\ddot{q}^{(1)} + \frac{1}{C}(q^{(1)} - q^{(2)}) + \frac{1}{C}(q^{(1)} - q^{(0)}) = 0$$

и потребовать *в решении*, чтобы было

$$-\frac{1}{C}(q^{(1)} - q^{(0)}) = \mathcal{E}\cos pt. \qquad (6)$$

---

[1] [См. 29-ю и 30-ю лекции.]

Такой прием обычен в вопросах распространения волн при точечных источниках.

Итак, мы требуем, чтобы удовлетворялись все прежние симметричные уравнения, но дополнительно требуем, чтобы выполнялось условие (6) на одном конце и условие

$$q^{(n+1)}=0 \tag{7}$$

на другом конце. Решать уравнения (1) мы будет при этом обычным способом, полагая

$$q^{(k)}=A^{(k)}\cos pt.$$

Формально мы получим такие же уравнения, как и раньше:

$$\left(\frac{2}{C}-Lp^2\right)A^{(k)}-\frac{1}{C}(A^{(k+1)}+A^{(k-1)})=0. \tag{8}$$

Разница по отношению к разысканию собственных колебаний состоит в том, что здесь частота p *задана* и надо искать только $A^{(k)}$. Если мы сделаем, как прежде, подстановку $\sin k\beta$, то неизвестно, сможем ли мы удовлетворить уравнениям (8). Попробуем выражение типа $e^{k\gamma}$, которое более гибко.

Итак, подставим в (8)

$$A^{(k)}=ae^{k\gamma}.$$

Как легко видеть, мы получим для определения γ уравнение

$$\left(\frac{2}{C}-Lp^2\right)-\frac{1}{C}(e^{\gamma}+e^{-\gamma})=0, \tag{9}$$

которое является квадратным уравнением по отношению к e^{γ}. Интересно то, что в зависимости от величины p значение γ, которое получается из (9), будет либо чисто мнимым, либо комплексным. В этих двух случаях фильтр ведет себя совершенно различно.

Если p таково, что

$$|2-LCp^2|<2, \tag{10}$$

то мы удовлетворим (9), взяв

$$\gamma=i\beta,$$

где β — действительная величина. Действительно,

$$e^{i\beta}+e^{-i\beta}=2\cos\beta\leqslant 2.$$

Если $\gamma = i\beta$ удовлетворяет уравнению (19), то $\gamma = -i\beta$ тоже удовлетворяет ему, так что уравнения (8) имеют при этом решение

$$A^{(k)} = ae^{ik\beta} + be^{-ik\beta}.$$

Так как амплитуды $A^{(k)}$ действительны, то нужно взять a и b комплексно сопряженными:

$$2ia = Ae^{-i\psi}, \quad -2ib = Ae^{i\psi}$$

(A и ψ — произвольные действительные величины), и мы получаем:

$$A^{(k)} = A \sin(k\beta - \psi). \tag{11}$$

Это решение означает, что фильтр *пропускает* частоту p.

Условие (10) может быть представлено в таком виде:

$$p < \frac{2}{\sqrt{LC}}.$$

Если условие (10) не выполняется, т. е. частота внешней э.д.с. $p > 2/\sqrt{LC}$, то величина γ при этом не является чисто мнимой; как мы увидим, таких частот фильтр *не пропускает*.

Таким образом, фильтр пропускает только частоты, лежащие ниже определенной *критической частоты*, равной

$$p = \frac{2}{\sqrt{LC}}. \tag{12}$$

Эффективность фильтра зависит от числа ячеек, но критическая частота от него не зависит; она определяется только структурой ячейки. Обычный (сплошной) кабель критической частоты не имеет, он пропускает все частоты.

Однако здесь нужно заметить следующее. Критическая частота отсутствует у *однородного* сплошного кабеля. Сплошной кабель с периодически меняющимися (в функции расстояния) L и C будет обладать фильтрующей способностью. Такой кабель будет пропускать низкие частоты и задерживать высокие.

Наряду с фильтрами рассматриваемого типа, нужны также фильтры обратного типа, пропускающие высокие частоты и задерживающие низкие. (Эти два типа фильтров составляют основу „фильтровальной“ техники.) В „обратном“ фильтре емкости расположены последовательно, а индуктивности — параллельно (рис. 133), т. е. емкости шунтируются индуктивностями.

Можно избежать нового математического исследования, сведя задачу о фильтре второго типа на задачу о фильтре первого типа. Составляя уравнения по Кирхгофу или по Лагранжу, получаем:

$$\frac{q^{(k)}}{C} + L\left(2\ddot{q}^{(k)} - \ddot{q}^{(k+1)} - \ddot{q}^{(k-1)}\right) = 0,$$

где $q^{(k)}$ — заряд на k-ом конденсаторе. Подстановка

$$q^{(k)} = A^{(k)} \cos pt$$

дает уравнения

$$\left(2L - \frac{1}{Cp^2}\right) A^{(k)} - L\left(A^{(k+1)} + A^{(k-1)}\right) = 0. \tag{13}$$

Сравним уравнения (13) и (8). Достаточно заменить $1/C$ на L, а L на $1/C$ и написать p вместо $1/p$, чтобы перейти от уравнений (8) к уравнениям (13). Сделав такую же замену в формуле (12), мы получим для фильтра второго типа следующее условие пропускания:

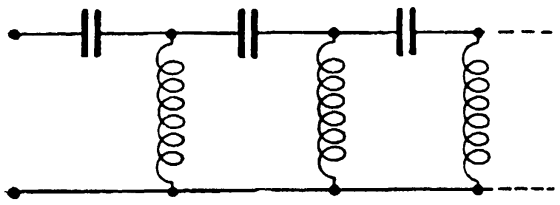


Рис. 133.

$$p > \frac{1}{2\sqrt{LC}}.$$

Частоты, лежащие ниже $1/2\sqrt{LC}$, он не пропускает. Для фильтра второго типа критическая частота (при тех же L и C) меньше, чем для первого.

Имея два фильтра, один — первого, другой — второго типа, можно составить из них фильтр, пропускающий лишь некоторый интервал частот. Первый фильтр задержит частоты *выше* некоторой определенной величины, второй задержит частоты *ниже* некоторой другой определенной величины. Разность этих величин и даст полосу пропускания.

То, что было сказано о пропускании и непропускании, нам еще предстоит доказать. Кроме того, нужно будет получить количественные выражения для амплитуды на выходе фильтра. Но я хотел бы сначала показать наглядно, в чем здесь „колдовство".

Возьмем фильтр первого типа (рис. 132). Почему он пропускает медленные колебания? Если приложить к одному концу постоянное напряжение от батареи, то на другом конце будет такое же напряжение, как на батарее. С другой стороны, для очень быстрых колебаний емкости представляют собой очень малые сопротивле-

ния, они образуют почти короткие замыкания. При очень большой частоте каждый конденсатор шунтирует предыдущую часть линии малым (и уменьшающимся с увеличением частоты) сопротивлением.

Возьмем фильтр второго типа (рис. 133). Приключенная к его концу батарея зарядит первый конденсатор, но дальше ток не пойдет, напряжение на конце будет равно нулю. Если же частота источника велика, каждая ячейка шунтируется большим сопротивлением (индуктивное сопротивление растет с увеличением p) и напряжение на конце линии велико.

Нам нужно теперь вычислить амплитуды колебаний в фильтре.

При частоте ниже критической в фильтре первого типа мы получаем, подставляя $q^{(k)} = A^{(k)} \cos pt$, где $A^{(k)}$ дается формулой (11), в граничное условие (6):

$$-A \sin \psi + A \sin (\beta - \psi) = C\mathcal{E}. \tag{14}$$

Второе уравнение для определения A и ψ мы получим, подставляя (11) в граничное условие (7):

$$A \sin [(n+1)\beta - \psi] = 0.$$

Отсюда

$$\psi = (n+1)\beta. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (14), имеем

$$A = -\frac{C\mathcal{E}}{2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)\beta}.$$

Пользуясь этой формулой, найдем амплитуду X напряжения $q^{(n)}/C$ на конце фильтра:

$$X = \frac{A^{(n)}}{C} = -\frac{A \sin (\psi - n\beta)}{C} = \frac{A \sin \beta}{C} = \frac{C\mathcal{E} \sin \beta}{C \cdot 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)\beta},$$

или

$$X = \mathcal{E} \frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\cos \left(n + \frac{1}{2}\right)\beta}. \tag{16}$$

Для очень малых p величина β также очень мала, и можно считать приближенно:

$$\cos \frac{\beta}{2} = 1, \quad \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)\beta = 1.$$

Напряжение на конце равно напряжению, подводимому к первой ячейке.

Формула (16) показывает также, что для некоторых участков частот напряжение на конце фильтра может быть значительно больше, чем $\mathcal{E}$. Фильтр пропускает все низкие частоты ($p < 2/\sqrt{LC}$), но пропускает их неравномерно. В частности, если p таково, что

$$\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta = 0,$$

то имеет место резонанс, $X = \infty$, т. е. напряжение на конце кабеля (в отсутствие затухания) растет неограниченно.

Затухание скрадывает эти различия. При больших затуханиях фильтр более или менее одинаково пропускает все частоты ниже критической.

Остается доказать вторую часть нашего утверждения — то, что фильтр практически не пропускает частот выше критической.

ТРИДЦАТЬ ВТОРАЯ ЛЕКЦИЯ

(12/V 1931 г.)

Фильтры (окончание). Исследование „прямого" фильтра при частоте выше критической. Распределение напряжения по ячейкам. Напряжение на конце. Поведение реальных фильтров при очень высоких частотах. Акустический резонатор и акустический фильтр. Механический фильтр В. Ф. Миткевича. Общие замечания о теории колебаний. Переход к распределенным системам. Разложимость произвольной функции по собственным функциям сплошной колебательной системы.

Закончим вопрос о фильтрах.

Мы искали решение дифференциальных уравнений фильтра в виде:

$$q^{(k)} = A^{(k)} \cos pt.$$

Для определения $A^{(k)}$ получаются уравнения

$$\left(\frac{2}{C} - Lp^2\right)A^{(k)} - \frac{1}{C}\left(A^{(k+1)} + A^{(k-1)}\right) = 0. \qquad (1)$$

Их можно решить подстановкой

$$A^{(k)} = ae^{k\gamma},$$

приводящей к уравнению

$$\left(\frac{2}{C} - Lp^2\right) - \frac{1}{C}(e^{\gamma} - e^{-\gamma}) = 0,$$

или

$$\operatorname{ch}\gamma = 1 - \frac{LC}{2}p^2. \tag{2}$$

Если γ — решение уравнения (2), то $-\gamma$ тоже является решением. В силу линейности системы (1) ее решением будет также

$$A^{(k)} = ae^{k\gamma} + be^{-k\gamma}. \tag{3}$$

Это решение содержит две произвольные постоянные a и b, нужные для того, чтобы удовлетворить обоим условиям на концах.

Если внешняя частота p удовлетворяет условию

$$|2 - CLp^2| < 2,$$

т. е. $LCp^2 < 4$, или

$$p < \frac{2}{\sqrt{LC}}, \tag{4}$$

то $\gamma = \pm i\beta$, где β — действительная величина.

Используя краевые условия

$$q^{(0)} - q^{(1)} = C\mathcal{E}\cos pt \quad \text{или} \quad A^{(0)} - A^{(1)} = C\mathcal{E} \tag{5}$$

и

$$q^{(n+1)} = 0 \quad \text{или} \quad A^{(n+1)} = 0, \tag{6}$$

мы получили для амплитуды X напряжения $q^{(n)}/C$ на конце фильтра выражение

$$X = \mathcal{E}\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\beta}. \tag{7}$$

Пусть теперь частота p больше критической, т. е.

$$|2 - CLp^2| > 2, \tag{8}$$

или

$$p > \frac{2}{\sqrt{LC}}.$$

Для таких p величина $1-LCp^2/2$ отрицательна, и на основании (2) γ не может быть действительным (если γ действительно, то $\operatorname{ch}\gamma$ положителен). В случае (8) γ не может быть и чисто мнимой величиной. Таким образом, теперь γ — существенно комплексная величина.

Пусть

$$\gamma=\xi+i\eta \tag{9}$$

(ξ, η — действительны). Тогда

$$\left.\begin{aligned} e^{\gamma}&=e^{\xi}(\cos\eta+i\sin\eta),\\ e^{-\gamma}&=e^{-\xi}(\cos\eta-i\sin\eta).\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Подставив (10) в (2) и учитывая, что правая часть действительная, мы получаем:

$$\sin\eta=0,\ \text{т. е. } \eta=m\pi,$$

где m — целое число. Но четные m ($m=0, 2, 4, \ldots$) непригодны: они не исправят знак в левой части уравнения (2), так как $\cos\eta$ при этом равен $+1$. Пригодны лишь нечетные m.

Возьмем, например, $m=1$, т. е. положим:

$$\gamma=\xi+i\pi. \tag{11}$$

Тогда $e^{\gamma}=-e^{\xi}$, $e^{-\gamma}=-e^{-\xi}$ и левая часть уравнения (2) обращается в

$$-(e^{\xi}+e^{-\xi})$$

(*с минусом!* Добавок $i\pi$ понадобился именно для того, чтобы обернуть знак).

Теперь можно удовлетворить уравнению (2), определив ξ из условия

$$\operatorname{ch}\xi=\left|1-\frac{LC}{2}p^2\right|. \tag{12}$$

Оно дает действительное ξ, так как в рассматриваемом случае

$$\left|1-\frac{LC}{2}p^2\right|>1.$$

При этом ξ тем больше, чем больше p.

Таким образом, для случая (8) мы получаем решение уравнений (1) в следующем виде:

$$A^{(k)}=ae^{k\xi+ik\pi}+be^{-(k\xi+ik\pi)}.$$

Принимая во внимание, что $e^{\pm ik\pi}=(-1)^k$, можно освободиться от мнимостей и написать:

$$A^{(k)}=(-1)^k(ae^{k\xi}+be^{-k\xi}). \tag{13}$$

Получился интересный результат: напряжения на последовательных конденсаторах имеют чередующиеся знаки.

Величины a и b определяются и здесь из краевых условий (5) и (6). Подставляя (13) в (5) и (6), имеем:

$$\left.\begin{aligned} a+b+ae^{\xi}+be^{-\xi}&=\mathcal{E},\\ ae^{(n+1)\xi}+be^{-(n+1)\xi}&=0. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Не решая системы (14), сделаем следующее замечание. Из второго уравнения (14) имеем:

$$a=-be^{-2(n+1)\xi}.$$

Отсюда видно, что если ξ не очень мало и если взять достаточно большое число звеньев, то a чрезвычайно мало по отношению к b.

Если k не очень велико, второй член в выражении (13) преобладает и решение практически имеет вид

$$A^{(k)}=(-1)^k be^{-k\xi}.$$

Таким образом, если частота превышает критическую, то (при указанном условии) напряжение монотонно падает с увеличением номера ячейки по экспоненциальному закону.

Для того, чтобы получить общее выражение для X, воспользуемся уже найденным нами решением (7), относящимся к первому случаю, когда γ чисто мнимое. Запишем его в виде

$$X=\mathcal{E}\frac{e^{i\frac{\beta}{2}}+e^{-i\frac{\beta}{2}}}{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta}+e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta}}=\mathcal{E}\frac{e^{\frac{\gamma}{2}}+e^{-\frac{\gamma}{2}}}{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma}+e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma}}. \tag{15}$$

Решение для второго случая получится, если подставить в (15), вместо γ, выражение (11). Это дает:

$$X=\mathcal{E}\frac{e^{\frac{\xi+i\pi}{2}}+e^{-\frac{\xi+i\pi}{2}}}{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)(\xi+i\pi)}+e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)(\xi+i\pi)}},$$

или, поскольку $e^{\pm i\pi/2} = \pm i$, $e^{\pm in\pi} = (-1)^n$,

$$X = \mathcal{E}(-1)^n \frac{e^{\frac{\xi}{2}} - e^{-\frac{\xi}{2}}}{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi} - e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}}. \tag{16}$$

Заметим прежде всего, что в зависимости от того, является ли число звеньев четным или нечетным, амплитуда напряжения на конце положительна или отрицательна. При сколько-нибудь большом n второй член в знаменателе можно откинуть, и тогда

$$X = \mathcal{E}(-1)^n \left(e^{\frac{\delta}{2}} - e^{-\frac{\delta}{2}}\right) e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta}. \tag{17}$$

Следовательно, при достаточно большом числе звеньев $|X|$ очень мало по сравнению с $\mathcal{E}$. Это и означает, что фильтр не пропускает частоты выше критической.

Пусть $\xi = 2$, $n = 10$. Получается ослабление в e^{20} раз. Такого большого ослабления на практике никогда не нужно. Не трудно иметь $\xi = 1{,}5$. Тогда для целей практики вполне достаточно 5—6 звеньев.

Возьмем крайний случай. Если p очень велико по сравнению с критической частотой, то, как легко видеть, уже первое звено фильтра — почти короткое замыкание. Общий принцип работы фильтров, таким образом, ясен.

Большей частью они работают на какие-нибудь нагрузочные устройства. Открытый конец получается в том случае, если фильтр подключен к сетке катодной лампы (если нет сеточного тока). Если же фильтр замкнут на некоторое конечное сопротивление, то нужно изменить граничные условия. Но пусть на открытом конце фильтра напряжение равно нулю. Тогда оно останется равным нулю, что бы к нему ни приключили. Так будет, в частности, если замкнуть конец накоротко.

Часто делают следующую ошибку.

Согласно теории, если $p \gg 2\sqrt{LC}$, то фильтр первого типа (рис. 132) практически не пропускает. Но возьмем ультравысокую частоту. На опыте окажется, что фильтр очень хорошо ее пропускает. Мне приходилось слышать, как на этом основании говорили, что теория никуда не годится. Но никогда нельзя забывать о предпосылках теории. Мы считали, что в последовательных ветвях нет емкости, а в параллельных — нет индуктивности. В дей-

ствительности всякая катушка имеет емкость, а всякие подводящие провода имеют индуктивность. Мы имеем право схематизировать фильтр так, как мы это делали, только если частота не слишком высока.

При достаточно быстрых колебаниях „индуктивность" может оказаться емкостью, а для фильтра это чрезвычайно существенно: вместо ожидаемого эффекта может получиться эффект фильтра противоположного типа. Нельзя экстраполировать результат, полученный в предположении, что емкость катушки мала, на сколь угодно высокие частоты.

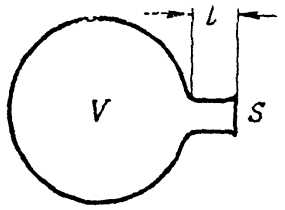


Рис. 134.

Еще большее значение имеют эти соображения в случае акустических фильтров. Акустики строят фильтр в виде комбинации акустических резонаторов.

Начнем с разбора акустического резонатора (рис. 134). Пусть V — объем сосуда, S — сечение цилиндра. Предположим сначала, что цилиндр закрыт поршнем. Вычислим период собственных колебаний.

Здесь изменяются давление p и плотность ρ, причем

$$\Delta p = a^2 \Delta \rho, \tag{18}$$

где a — скорость звука[1]. На поршень действует сила

$$F = S \Delta p. \tag{19}$$

Для определения F мы должны вычислить Δp. Имеем: $\rho V = \text{const}$, откуда

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = -\frac{\Delta V}{V}. \tag{20}$$

Но

$$\Delta V = Sx, \tag{21}$$

где x — смещение поршня. Подставляя $\Delta \rho$ из (20) в выражение (18) и воспользовавшись (19) и (21), получаем для силы выражение

$$F = -\frac{a^2 \rho S^2}{V} x.$$

Мы можем теперь написать уравнение движения поршня:

$$M\ddot{x} + \frac{a^2 \rho S}{V} x = 0, \tag{22}$$

где M — масса поршня.

[1] [Ср. 2-ю лекцию части II.]

Давление во всем сосуде мы считали одинаковым. Поэтому уравнение (22) справедливо лишь для достаточно медленных колебаний, у которых длина акустической волны много больше размеров сосуда.

Акустики имеют дело с резонаторами *без* поршня. При этом они делают довольно смелую гипотезу, которая при некоторых условиях хорошо оправдывается на опыте. Они применяют для резонатора без поршня уравнение (22), понимая под M массу воздуха в цилиндрическом горлышке. Масса всего остального воздуха не принимается во внимание. На первый взгляд это странно, ибо остальной объем гораздо больше, но эту гипотезу можно подтвердить более точным расчетом, а именно для достаточно медленных колебаний. В этом случае воздух имеет заметную скорость только в горлышке. Нужно сравнивать не *массы* воздуха в горлышке и сосуде, а соответствующие энергии. Оправдание гипотезы в том, что кинетическая энергия воздуха в горлышке гораздо больше, чем в сосуде. Так как

$$M = \rho l S,$$

где l — длина горлышка, уравнение резонатора принимает вид

$$\rho l S \ddot{x} + \frac{a^2 \rho S^2}{V} x = 0. \tag{23}$$

Итак, в теории акустических резонаторов предполагается, что давление воздуха в сосуде постоянно и что воздух *внутри* сосуда не имеет кинетической энергии. Если эти допущения справедливы, то, исходя из них, можно построить акустический фильтр. Его можно сделать в виде трубы с перегородками, через которые проходят узкие трубки (рис. 135). В трубках сосредоточена кинетическая энергия, в камерах—потенциальная.

Если написать дифференциальные уравнения движения для такой цепочки из камер и трубок, то получится то же, что и для струны с грузами или для электрического фильтра. Камеры играют роль пружин или емкостей, а трубки — масс или индуктивностей. Сравнивая дифференциальное уравнение (23) с соответствующими уравнениями для электрической и механической систем, не трудно видеть, что

$\rho l S$ аналогично L или m,

$a^2 \rho S^2 / V$ аналогично $1/C$ или α.

Отсюда можно заключить, что система пропускает тогда, когда

$$p < 2a\sqrt{\frac{S}{lV}}.$$

Она является акустическим фильтром для пропускания низких частот.

Для того, чтобы можно было пользоваться этой теорией, длина волны должна быть велика по отношению к линейным размерам камер. При очень высоких частотах эта теория совершенно непригодна.

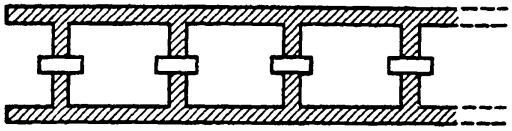


Рис. 135.

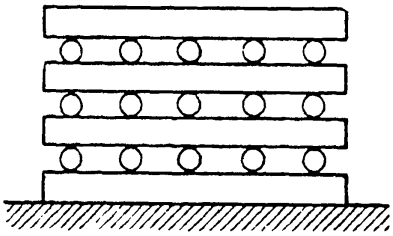


Рис. 136.

Укажем еще на механический фильтр В. Ф. Миткевича. Для того, чтобы обезопасить приборы от сотрясений, он делает „слоеный пирог“ из тяжелых плит, между которыми проложены резиновые трубки или стержни (рис. 136). Это, в сущности, механический фильтр. В сейсмографии берут для той же цели *одну* систему с очень медленным периодом; для высокочастотных колебаний такой механический фильтр гораздо эффективнее. А. И. Данилевский применял аналогичные устройства для записи граммофонных пластинок (при передаче акустических колебаний на резец).

Рассмотрением фильтров мы закончим наш курс в этом году. Сделаем несколько заключительных замечаний.

Колебания — очень важная и специфичная область.

Одна из характерных черт колебательных систем — та, что они несут в себе свой масштаб времени. Он определяется собственным периодом колебаний, или, если говорить более общо, динамическими свойствами системы. Именно этот временной масштаб является решающим в вопросах резонанса, а также в вопросе о связи, о взаимодействии между колебательными системами. Если колебательные системы расстроены, то даже на „близком“ расстоянии они почти не действуют друг на друга; если они настроены, то они сильно взаимодействуют даже на „большом“

расстоянии[1]. Таким образом, какое расстояние между колебательными системами следует считать близким, а какое — далеким, зависит от их колебательных свойств.

Эти представления особенно важны в волновой механике. Она в каком-то смысле рассматривает всякое тело как колебательную систему. В частности, молекулы являются колебательными системами. Их взаимодействие коренным образом зависит от соотношений их колебательных свойств. Поэтому пространственное расстояние двух молекул само по себе не дает еще указаний на то, действуют они друг на друга заметно или нет.

Итак, законы взаимодействия колебательных систем очень специфичны. Вместе с тем они являются общими для самых различных явлений, происходящих в электрических контурах, маятниках, кристаллах. Это — совершенно разные вещи, но колебательные закономерности их объединяют.

Из-за недостатка времени мы очень бегло коснулись теории нелинейных колебаний и совсем не затронули колебаний распределенных (сплошных) систем. Между тем потребность в этих разделах теории колебаний — насущная.

Струна, кабель — это сплошные системы. Как происходит переход от дискретной системы к сплошной? Мы можем это выяснить на примере фильтра.

Для дискретной системы (фильтра) мы имели:

$$u^{(k)} = a_s \sin \frac{ks\pi}{n+1} \cos(\omega_s t + \varphi_s), \tag{24}$$

$$\omega_s = \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin \frac{s\pi}{2(n+1)} \tag{25}$$

(через $u^{(k)}$ здесь обозначено напряжение на k-том звене). У нас было n ячеек и n соответствующих им величин $u^{(k)}$. Каждая из них — функция времени.

Пусть каждая ячейка делается все меньше, а число ячеек — все больше. Тогда неудобно характеризовать ячейку ее номером. Введем расстояние x от начала системы до рассматриваемой ячейки. Пусть расстояние между ячейками будет d. Тогда

$$x = kd, \quad l = (n+1)d. \tag{26}$$

---

[1] [См. 25-ю лекцию.]

Подставляя (26) в (24), получаем:

$$u(x) = a_s \sin \frac{s\pi x}{l} \cos(\omega_s t + \varphi_s). \tag{27}$$

В этой формуле дискретность исчезла, но это пока только видимость, так как u имеет смысл лишь для дискретных значений x.

Пусть теперь число ячеек растет неограниченно, т. е. $n \to \infty$. В пределе u становится непрерывной функцией *двух* величин: t и x. Легко убедиться, что эта функция удовлетворяет одному дифференциальному уравнению, но в частных производных, а именно уравнению

$$\frac{1}{L_1 C_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{28}$$

где L_1 и C_1 — индуктивность и емкость на единицу длины. Этому дифференциальному уравнению в частных производных удовлетворяет вся совокупность функций (27), соответствующих различным значениям s.

Задачи о колебаниях сплошных систем приводят к составлению и решению дифференциальных уравнений в частных производных с добавлением краевых условий (краевые условия играют в математике чрезвычайно важную роль). Этот метод гораздо более могуч, чем методы, применяемые при рассмотрении дискретных систем со многими степенями свободы. Там мы умеем решать некоторые задачи только потому, что они обладают определенной симметрией, например в случае одинаковых звеньев. Заметим также, что методы, применяемые для решения задач о сплошных системах, охватывают и системы, имеющие больше одного измерения.

Таким образом, открывается целая новая область исследования, интересная и физически и математически, — колебания *сплошных* систем.

Мы знаем, что общим решением в случае дискретной системы (s принимает только конечное число значений: $s = 1, 2, \ldots, n$) является

$$u = \sum_{s=1}^{n} a_s \sin \frac{ks\pi}{n+1} \cos(\omega_s t + \varphi_s). \tag{29}$$

Можно ожидать, что и в случае сплошной системы, когда s

принимает бесконечный ряд значений, общее решение может быть построено по аналогии с (29), т. е. имеет вид

$$u = \sum_{s=1}^{\infty} a_s \sin \frac{s\pi x}{l} \cos(\omega_s t + \varphi_s). \tag{30}$$

Правильность этого предположения можно доказать. То, что решение (30) является общим, означает, что оно должно изображать — при соответствующем подборе величин a_s и φ_s — любой начальный вид функции u и ее производной по времени:

$$\left.\begin{aligned} u(0, x) &= \sum_{s=1}^{\infty} a_s \cos \varphi_s \sin \frac{s\pi x}{l}, \\ \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} &= \sum_{s=1}^{\infty} a_s \omega_s \sin \varphi_s \sin \frac{s\pi x}{l}. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Мы говорили о кабеле. Но выражением, аналогичным (29), может быть описано также любое колебание однородной струны с закрепленными концами. Это нашел Бернулли, и он сделал отсюда такой вывод: можно задать начальную форму струны как угодно — изогнуть ее произвольным образом и отпустить. Но тогда формула (31) должна представлять *любую* функцию. Итак, если правильно, что любое колебание струны можно выразить как сумму колебаний вида (30), то любую функцию можно представить в виде ряда синусов. Здесь на основании физических соображений высказывается глубокое математическое утверждение.

Если емкость на единицу длины не постоянна, а изменяется с x, то решениями будут не синусы, а какие-то другие функции. Но все соображения о разложении произвольной функции на систему функций, являющихся решением задачи о колебаниях сплошной системы, остаются в силе. Для различных неоднородных систем получаются различные системы таких „собственных функций". Учение о разложении заданной функции в ряд по собственным функциям рассматриваемой колебательной задачи имеет очень существенное значение и в математике и в физике.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

КОЛЕБАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

ПЕРВАЯ ЛЕКЦИЯ

(19/XI 1931 г.)

Теория относительности утверждает, что не существует абсолютно твердых тел. Различные подходы к задаче о колебаниях твердого тела. Предельный переход к сплошной среде в решении задачи об одномерной упругой цепочке. Вывод уравнения стержня из теории континуума. Замечания о понятии скорости волны. Производная для данного места и для данной частицы. Изотермический и адиабатический модули Юнга.

Теория относительности принципиально не допускает существования абсолютно твердого тела. Мы знаем, что ни один сигнал не может распространяться со скоростью большей, чем скорость света в вакууме. Это было бы не так, если бы существовало абсолютно твердое тело: перемещение твердого тела как целого можно рассматривать как сигнал, который мгновенно передается по телу. Если тело не абсолютно твердое, то при смещении одного его конца (в сторону другого конца) возникает сгущение, которое будет распространяться с определенной скоростью.

Состояние деформированного „твердого" тела не может быть описано с помощью конечного числа параметров. На первый взгляд это несколько трудно соединить с представлением о молекулярной структуре тела.

Колебания сплошной среды играют важную роль в физике и ее приложениях. Возьмем вопрос о колебаниях струн в акустике. Это по многим соображениям — один из основных вопросов для нас, в частности потому, что в истории науки большую роль сыграли математические вопросы, связанные со струной. Борьба между различными взглядами на функцию развивалась как раз в связи с уравнением колебаний струны[1].

---

[1] [См. 5-ю лекцию части II.]

Струна, стержень — это распределенные системы *в одном* измерении. Есть и двухмерные системы. С ними мы имеем дело при изучении колебаний пластин и мембран. Важны и трехмерные распределенные системы.

Большое значение имеют задачи о колебании балки, о крутильных колебаниях валов. Затем идут вопросы, связанные с мостами. В первом приближении можно рассматривать мост как стержень. Далее идут вибрации корабля, колебания турбинных лопаток и т. д.

Другой круг вопросов — электрические распределенные системы, например лехерова система. Теория колебаний распределенных систем охватывает и вопросы, связанные с антеннами беспроволочного телеграфа.

Динамика сплошного тела — это вопросы распространения колебаний. В случае электрических колебаний мы тоже имеем дело с вопросами распространения в сплошной среде.

Все эти вопросы представляют и чисто математический интерес. Физика дала громадный толчок математике. Именно в связи с задачами о колебаниях сплошной среды развились интегральные уравнения, отсюда же возникла теория разложения в ряды Фурье. В связи с этими задачами Бернулли первый сказал, что произвольную функцию можно разложить в тригонометрический ряд.

Мы не сможем здесь коснуться и малой доли всех вопросов. В частности, мы почти не будем касаться вопросов распространения, хотя они имеют очень большое значение.

Поясним на примере физическую постановку задач, относящихся к колебаниям в сплошной среде.

Пусть имеется стальной стержень и мы хотим изучить его динамику. Мы знаем, что все тела состоят из молекул. Казалось бы, проще всего разобрать вопрос с молекулярной точки зрения: даны силы, действующие между молекулами; требуется найти, как происходят колебания стержня. Этот путь в настоящее время невозможен по многим причинам, хотя бы по следующей. Для изучения молекулярного механизма нужна волновая механика, но попробуйте рассчитать задачу о 10^{21} телах!

Второй путь заключается в следующем. Мы рассматриваем тела с молекулярной точки зрения. Например, кристалл каменной соли мы рассматриваем как кристаллическую решетку, построенную из ионов хлора и ионов натрия. Но мы можем идеализировать силы и решать задачу так, как будто атомы или ионы в решетке

кристалла действуют друг на друга с определенными квазиупругими силами. Это — некоторый средний путь.

Есть еще третий путь. Тело рассматривается как сплошное. Считается, что плотность, упругость — непрерывные функции точки. Другими словами, мы идеализируем рассматриваемое тело как сплошное и применяем к нему математический аппарат непрерывных функций. Такая „сплошизация" задачи применяется и при построении макроскопической электродинамики Максвелла на основе электронной теории Лоренца.

Здесь нужно быть иногда очень осторожными. Спросим себя например, что такое плотность в данной точке? Чтобы получить плотность, берут массу m и делят ее на объем V.

Если мы будем уменьшать объем, то будем получать различные значения частного. Можно искать предел

$$\lim_{V\to 0} \frac{m}{V}.$$

Если бы вещество было сплошным, то, взяв достаточно малый объем и уменьшив его вдвое, мы получили бы практически неизменное отношение m/V. Но мы знаем, что вещество не сплошное. Пусть объем V такой, что в нем содержится только одна молекула. Что будет, если мы его уменьшим вдвое? Ни о каком пределе здесь говорить нельзя. Однако, если V не слишком велико и не слишком мало, то отношение m/V будет приблизительно постоянным, при условии, что состояние тела заметно изменяется лишь на расстояниях, больших по сравнению с расстояниями между молекулами. В кристаллах физики интересуются и такими процессами, где изменение состояния происходит на расстояниях, сравнимых с расстояниями между молекулами (высокие собственные частоты колебаний кристаллической решетки). Но мы будем заниматься только такими процессами, где этого еще нет.

Повторим кое-что, относящееся к колебаниям цепочки из дискретных частиц, имеющих одинаковую массу.

Отклонение k-той частицы (yk) удовлетворяет уравнению

$$m\frac{d^2yk}{dt^2} = \alpha[(y_{k+1} - y_k) - (y_k - y_{k-1})] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (1)$$

В правой части стоит разность сил

$$f = \alpha\Delta a, \qquad (2)$$

действующих справа и слева (a — расстояние между соседними частицами). Здесь возможны n колебаний:

$$y_k = A_s \sin \frac{ks\pi}{n+1} \cos(\omega_s t + \varphi_s) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

причем их частоты даются формулой

$$\omega_s = 2\sqrt{\frac{\alpha}{m}} \sin \frac{s\pi}{2(n+1)} \tag{4}$$

(имеется n различных частот).

Существенно то, что в выражения для амплитуд и частот входят молекулярные свойства, свойства отдельных частиц. Если общая масса и длина цепочки не изменяются, но молекулярные константы α и m, скажем, уменьшатся вдвое, то результаты (3) и (4) изменятся.

Выразим макроскопические постоянные через молекулярные. Масса ρ' на единицу длины есть

$$\rho' = \frac{nm}{l} = \frac{m}{a}$$

(l — длина цепочки), так как $l = na$.

Если приложить силу f к концу стержня, то он растянется на некоторое Δl, причем

$$f = E' \frac{\Delta l}{l}, \tag{5}$$

где E' — „модуль упругости континуума“. Относительное удлинение стержня $\Delta l/l$ равно относительному удлинению каждой „ячейки“. Поэтому, сравнивая (2) и (5), получаем:

$$\alpha = \frac{E'}{a}.$$

Рассмотрим случай, когда отношение s/n мало.

Пусть мы имеем одномерную модель действительного кристалла. Здесь n — порядка 10^9 или 10^{10}. Если даже $s = 1000$ или $s = 10\,000$, то отношение s/n еще чрезвычайно мало.

В акустике требование малости отношения s/n ограничивает нас довольно мало. Например, в случае стержня на опыте дальше определенного s идти нельзя.

Для малых s/n формула (4) вырождается в следующую:

$$\omega_s = \frac{s\pi}{l}\sqrt{\frac{E'}{\rho'}}.$$

Таким образом, в выражение для частот низких тонов входят только макроскопические величины.

Перейдем к амплитудам. На основании (3), пренебрегая отличием между n и $n+1$, имеем для амплитуды y_k в s-ом колебании:

$$A_s \sin \frac{ks\pi a}{na} = A_s \sin \frac{s\pi x}{l}.$$

Сюда входит $x = ka$ — расстояние k-той точки от начала. Справа стоит функция от x. В случае дискретной системы она имеет смысл только для определенных (дискретных) значений x. В сплошной системе она имеет смысл для непрерывно меняющегося x; здесь она определена для любого x, и

$$y(x, t) = A_s \sin \frac{s\pi x}{l} \cos(\omega_s t + \varphi_s).$$

Итак, сначала у нас было n функций $y_k(t)$, определенных для дискретных значений k. Они удовлетворяли обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка. Теперь (при сплошности) у нас одна функция $y(x, t)$ от двух непрерывно меняющихся переменных. Во что обращаются дифференциальные уравнения? Легко видеть, что теперь имеется дифференциальное уравнение, связывающее производную от функции $y(x, t)$ по x и ее производную по t. Вот это уравнение:

$$\frac{E'}{\rho'} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{6}$$

При переходе к сплошной системе мы получаем, таким образом, одно дифференциальное уравнение, но в *частных* производных. В том, что наше $y(x, t)$ удовлетворяет уравнению (6), легко убедиться простой подстановкой.

Пусть, например, $s = 2$. В этом случае частота

$$\nu_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E'}{\rho'}}.$$

Умножив ν_2 на длину волны $\lambda_2 = l$, получим:

$$\nu_2 \lambda_2 = \sqrt{\frac{E'}{\rho'}}.$$

Иногда вводят вместо линейной плотности ρ' обычную плотность (на единицу объема):

$$\rho = \frac{\rho'}{q}$$

(q — площадь поперечного сечения), причем

$$Eq = E'$$

(E — модуль Юнга). Мы можем написать вместо (6):

$$a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

где

$$a = \sqrt{\frac{E'}{\rho'}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Всюду пишут: a есть скорость распространения колебаний, так как скорость распространения волн есть

$$v = \lambda \nu.$$

Но я хотел бы здесь предостеречь от ошибок. Что такое скорость? Какое отношение имеют друг к другу величины v и a? На первый взгляд — никакого, так как в рассматриваемой задаче нет распространения; речь идет о стоячих волнах.

Понятие скорости нельзя без критики применять к волновому движению, нужно точно определить, что под ним понимается. Скорость движения волн есть нечто принципиально другое, чем скорость движения частицы (хотя и есть некоторая связь между этими двумя понятиями). Когда без критики отождествляли эти два понятия, то наталкивались на неприятности. Нет скорости волны *вообще*. Можно говорить, например, о *фазовой* скорости, о скорости *фронта*, о *групповой* скорости. Вот уже три различные понятия скорости волн, а для частиц достаточно одного. В случае волнового движения с понятием скорости нужно быть осторожным.

Вернемся к разбираемому вопросу. Мы исходили из дискретной системы, путем предельного перехода в решении пришли к определенному решению для сплошной среды и убедились дифференцированием, что оно удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению.

Часто поступают иначе (это делается во многих учебниках): вместо перехода к пределу в решениях стремятся провести предельный переход от самих уравнений дискретной системы к уравнению в частных производных. Делается это так.

Перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{E'}{\rho' a^2}\left[(y_{x+a} - y_x) - (y_x - y_{x-a})\right] \tag{7}$$

(k-тая точка находится на расстоянии x от начала). Делают фокус: разлагают $y_{x\pm a}$ по формуле Тэйлора:

$$y_{x+a} - y_x = y'a + y''\frac{a^2}{2} + y'''\frac{a^3}{6} + \ldots,\quad y_{x-a} - y_x = -y'a + y''\frac{a^2}{2} - \ldots$$

Если сложить эти выражения, подставить в (7) и отбросить малые величины, то получится уравнение (6).

Но в исходном уравнении (7) функция y определена лишь для дискретных точек, и, следовательно, у нее нет производных по x! Дифференцирование по x — очень сомнительный прием, хотя и дающий верный результат. Его оправдание связано с тем, что непрерывную функцию можно определить ее значениями во всех рациональных точках. Если функцию, заданную в рациональных точках, мы заменяем непрерывной функцией, то эта функция — единственная.

Впрочем, в физике всюду приходится делать такие вещи.

После того как мы себе уяснили связь между „дискретным“ и „сплошным“ подходом, постараемся рассмотреть всю проблему с самого начала со „сплошной“ точки зрения.

Вырежем кусок стержня — элемент длины (рис. 137). Одно из основных утверждений теории упругости состоит в том, что силы, действующие на него со стороны остальной части тела, могут быть заменены поверхностными силами (это совершенно не очевидно). Между деформациями и этими силами существует определенная зависимость. Для не очень больших деформаций имеет место пропорциональность, т. е. закон Гука. Пусть произошла какая-то деформация. Благодаря деформации возникает напряжение. Сила, действующая на сечение x, будет

$$f_x = \left(qE\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x;$$

сила, действующая на сечение $x + \Delta x$, будет

$$f_{x+\Delta x} = \left(qE\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}.$$

Их результирующая F равна произведению массы выделенного элемента на его ускорение:

$$F = \left(qE\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(qE\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(qE\frac{\partial y}{\partial x}\right)\Delta x = \rho\Delta x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Кроме сил упругости, могут быть и другие, например внешние объемные силы. Обозначим через $f(x, t)$ объемную силу, действующую на единицу массы. Тогда на кусок Δx действует объемная сила $f(x, t)\rho q\Delta x$. Прибавляя ее к F и сокращая на Δx, получаем уравнение

$$f(x, t)\rho q + \frac{\partial}{\partial x}\left(qE\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \rho q\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{8}$$

В нашем рассуждении не требуется, чтобы E, ρ и q были постоянными. Можно было бы рассмотреть неоднородный стержень

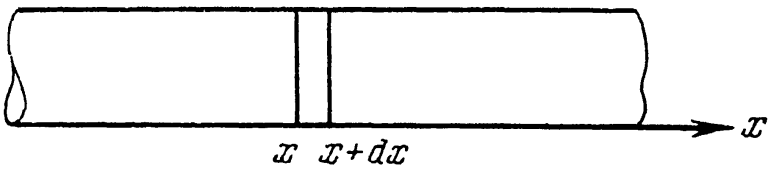


Рис. 137.

и в молекулярном представлении, считая, что упругости пружин и массы меняются с номером по определенному закону. Но там это очень сильно усложнит дело.

Предположим для начала, что q, E и ρ постоянны. В этом случае (8) превращается в

$$f(x, t) + a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{9}$$

Сделаем два небольшие замечания (часто забывают о существенных в данном вопросе вещах, забывают о сделанных ограничениях и в результате сталкиваются с неприятностями).

1. У нас y — функция от x и от t. Как нужно понимать частную производную по t? Она характеризует изменение по t для данного x. Это — производная в *данном месте*. Но законы Ньютона относятся к данной частице, а не к данному месту. По смыслу законов Ньютона, когда мы составляем производную по времени, мы должны следить за определенной частицей; для того, чтобы получить ускорение, мы должны взять скорость в момент t и в момент $t + \Delta t$ для одной и той же частицы. Производная, взятая для данной частицы, и производная в данной точке пространства — не одно и то же. Соотношение между производ-

ной по времени для данной частицы $D\varphi/Dt$ и производной в данной точке пространства $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ таково:

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\mathbf{u}, \operatorname{grad}\varphi). \tag{10}$$

Здесь имеется член, содержащий скалярное произведение скорости на градиент φ. При малых колебаниях — это член второго порядка, в чем и лежит оправдание проявленной нами „ловкости рук".

Уравнения Ньютона инвариантны по отношению к галилеевой группе преобразований. Волновое уравнение по отношению к ней *не* инвариантно. Оно инвариантно по отношению к преобразованию Лоренца. Но мы вывели волновое уравнение из уравнений Ньютона, и поэтому оно, казалось бы, должно быть инвариантно по отношению к преобразованию Галилея. Противоречие связано как раз с отбрасыванием члена $(\mathbf{u}, \operatorname{grad}\varphi)$.

2. Мы считали, что стержень обладает вполне определенным модулем Юнга. Но на самом деле модуль Юнга зависит от температуры. Из термодинамики следует, что при упругих деформациях температура меняется и при этом модуль Юнга изменяется. Он *принципиально* не является постоянной величиной. Можно рассматривать два крайних случая. Во-первых, случай очень медленных деформаций, происходящих при постоянной температуре (происходит выравнивание температуры с окружающей средой). Вещество имеет при этом некоторый определенный модуль Юнга. Во-вторых, случай настолько быстрых деформаций, что стержень не успевает отдавать тепло внешней среде. Тогда вещество имеет другой модуль Юнга.

Обычно в твердых телах ни то, ни другое неправильно, но, к счастью, зависимость модуля Юнга от температуры ничтожна; она особенно значительна в газах.

ВТОРАЯ ЛЕКЦИЯ

(29/XI 1931 г.)

Уравнения гидродинамики и вывод из них волнового уравнения. Определение понятия скорости волны. Скорость звука в газах по Ньютону и по Лапласу. „Элементарный вывод" уравнений двухпроводной электрической линии. Критика этого вывода. Правильная постановка задачи на основе теории Максвелла.

В прошлый раз мы получили для колебаний стержня уравнение

$$f(x,\ t)\rho q + \frac{\partial}{\partial x}\left(Eq\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \rho q \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\ . \qquad (1)$$

Нужно помнить, что это уравнение справедливо лишь приближенно, при условии, что y (отклонение от положения равновесия) мало, так как только в этом случае (с точностью до величин второго порядка) производную для данной частицы можно заменить производной для данной точки пространства.

При составлении уравнения (1) был сделан еще ряд упрощений. В частности, предполагалось, что имеется только продольное смещение. В действительности имеется и поперечное движение. Им можно пренебрегать только если стержень не очень тонкий. Можно внести поправки, учитывающие поперечное движение.

Энергия стержня при наших предположениях состоит из потенциальной энергии

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l Eq\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$

и кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \rho q\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx.$$

Эти выражения могут быть получены путем предельного перехода от дискретной модели.

Рассмотрим теперь трехмерную гидродинамическую или акустическую среду и выясним, каковы ее уравнения движения.

Гидродинамика исходит из следующего основного положения. Она утверждает, что если выделить некоторую массу (рис. 138), то действующие на нее силы могут быть заменены поверхностными силами. Это не само собой очевидная истина. Это утверждение связано с тем, что действие молекулярных сил распространяется лишь на очень небольшие расстояния.

Мы будем считать далее, что силы, действующие на каждую малую площадку, перпендикулярны к площадке и направлены внутрь выделенной массы, а их величина пропорциональна величине площадки. Предположение, что силы перпендикулярны к площадке, означает, что мы считаем среду идеальной жидкостью (или газом) в гидродинамическом смысле, т. е. жидкостью (или газом), не сопротивляющейся изменению формы. В твердом теле дело обстоит не так. В нем есть силы, сопротивляющиеся сдвигу.

Если в данном месте менять ориентацию площадки, то, как можно показать, величина давления на нее не зависит от ориентации площадки.

Напишем для рассматриваемой среды уравнение движения

$$\int_V \rho dV \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{K}. \qquad (2)$$

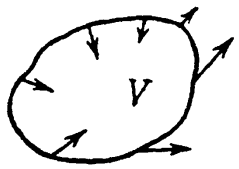


Рис. 138.

Здесь ρ — плотность; $\mathbf{u}$ — скорость; $\mathbf{K}$ — сумма всех сил, действующих на вещество, заключенное в объеме V. Уравнение (2) выражает то, что сумма всех ускорений, умноженных на соответствующие массы, равна сумме всех действующих сил.

Пусть, кроме поверхностных, имеются также и объемные силы. Тогда

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{f}\rho dV + \oint_S p\mathbf{n}dS, \qquad (3)$$

где $\mathbf{f}$ — объемная сила на единицу массы; p — давление, dS — элемент площади. Но

$$\oint_S p\mathbf{n}dS = -\int_V \nabla p \cdot dV \qquad (4)$$

(это справедливо для любого объема).

Пользуясь соотношениями (3) и (4), мы можем написать уравнение движения массы в виде

$$\int_V \left(\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \mathbf{f}\rho + \nabla p\right) dV = 0.$$

Так как это верно для любого объема, то отсюда следует, что подинтегральная функция равна нулю:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho\mathbf{f} - \nabla p.$$

Производная $d\mathbf{u}/dt$ относится к данной материальной точке. Так должно быть по смыслу второго закона Ньютона, тут нет свободы выбора. Но[1]

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}=\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u},\ \nabla)\cdot\mathbf{u},$$

и, следовательно,

$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\rho(\mathbf{u},\ \nabla)\cdot\mathbf{u}=\rho f-\nabla p.$$

Сколько здесь неизвестных? ρ, вообще говоря, — переменная, неизвестная величина. p и ρ связаны некоторым соотношением:

$$p=p(\rho),$$

вид которого зависит от уравнения состояния среды. Третье неизвестное — $\mathbf{u}$. Таким образом, для определенности задачи нужен еще один физический закон.

Если в некоторый объем входит определенное количество вещества (например, газа), то это вызывает изменение количества вещества:

$$\oint_S \rho\mathbf{u}\mathbf{n}\,dS=-\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dV.$$

Отсюда на основании теоремы о дивергенции

$$\oint_S \mathbf{a}\mathbf{n}\,dS=\int_V \operatorname{div}\mathbf{a}\cdot dV$$

следует уравнение сплошности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\operatorname{div}\rho\mathbf{u}.$$

Мы получили систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}&\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\rho(\mathbf{u},\ \nabla)\cdot\mathbf{u}=\rho\mathbf{f}-\nabla p,\quad p=p(\rho),\\&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\mathbf{u}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Применим их сначала к плоской задаче: будем считать, что $\mathbf{u}$, ρ и p зависят только от x и что вектор $\mathbf{u}$ имеет только одну ком-

---

[1] [Формула (10) 1-й лекции относилась к *скаляру*.]

поненту, отличную от нуля, — компоненту по x. Уравнения (5) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho u\frac{\partial u}{\partial x}=\rho f-\frac{\partial p}{\partial x}, \quad p=p(\rho),\\ &\frac{\partial \rho}{\partial t}=-\frac{\partial \rho u}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Это очень неприятные уравнения, так как они нелинейны. Решить их совсем нелегко. Эти уравнения послужили исходной точкой для работ Римана, в которых исследуется распространение разрывов волн.

Мы ограничимся малыми колебаниями. Напишем:

$$\rho=\rho_0+\delta\rho$$

и, считая, что u и $\delta\rho$ малы, пренебрежем величинами второго порядка относительно u и $\delta\rho$. Тогда уравнения существенно упростятся. Будем считать кроме того, что внешних (объемных) сил нет. Из первых двух уравнений (6) имеем:

$$\rho_0\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x}, \quad p=p(\rho), \tag{7}$$

а из третьего

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=-\rho_0\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{8}$$

Мы хотим получить два уравнения с двумя неизвестными u и ρ. Для этого нужно исключить p с помощью второго уравнения (7). Продифференцируем его:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x}. \tag{9}$$

С точностью до величин второго порядка, подставляя (9) в (7), имеем:

$$\rho_0\frac{\partial u}{\partial t}=-\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho_0}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x}. \tag{10}$$

В итоге мы получили два уравнения для u и ρ — уравнения (8) и (10). Мы сравним их потом с уравнениями для электрического случая.

Исключая u из (8) и (10), получаем:

$$a^2\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}, \tag{11}$$

где

$$a^2=\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho_0}. \tag{12}$$

Совершенно такое же уравнение получится для u при исключении ρ.

Что такое здесь a? Это требует особого рассмотрения.

Предположим, например, что мы осуществили очень короткий сигнал. Оказывается, что скорость такого сигнала — отношение пройденного им пути к времени — будет равна a.

Понятие скорости, которым мы только что воспользовались, взято из механики материальных *тел*. В основе понятия скорости тела лежит то, что можно отождествить тело при $t=t_0$ и при $t=t_1$. Скорость определяется как расстояние x_1-x_0, пройденное телом, деленное на время t_1-t_0. Но что назвать скоростью тела, если при движении оно разлетается на куски?

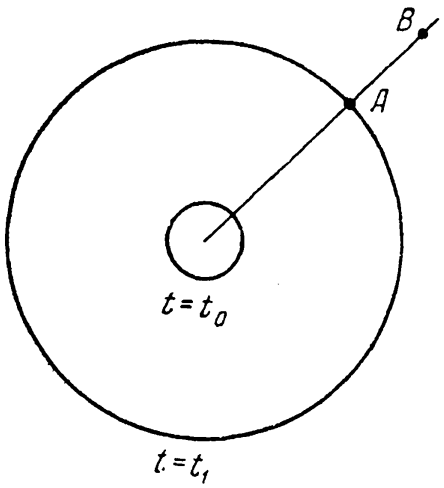


Рис. 139.

Можно ли пользоваться понятием скорости, когда мы имеем дело с сигналом, с возмущением? Возмущение распространяется во все стороны. Созданное в некотором месте возмущение (например, сгущение) изменяется при распространении. Возмущение не остается подобным тому, которое выпущено при $t=t_0$. Если в начале возмущение охватывает только малый объем, то через некоторое время будет существовать возмущенный слой с определенным внешним радиусом (рис. 139). Здесь можно ввести *разные* понятия скорости. Рассматривая время между прохождением фронта волны (внешней границы возмущения) через точку A и точку B, можно ввести понятие *скорости фронта*. Но можно дать также иные определения скорости, ввести, например, понятие *групповой* скорости. Величина a, входящая в наше уравнение (11), может быть определена из опыта как

$$a=\lambda\nu,$$

где ν — частота; λ — длина волны.

Вот как здесь происходило историческое развитие.

Первым, кто теоретически исследовал скорость звука, был Ньютон (1687). Он исходил из закона Бойля

$$\frac{p}{\rho}=\frac{p_0}{\rho_0}$$

и получил:

$$a^2 = \frac{p_0}{\rho_0}.$$

Ньютон придал этому результату красивую формулировку. Предположим, что атмосфера однородна и имеет высоту h и плотность ρ_0. Тогда атмосферное давление на поверхности земли равно

$$p_0 = gh\rho_0,$$

и, следовательно,

$$a = \sqrt{gh}.$$

Скорость звука, говорит Ньютон, равна скорости тела, падающего без сопротивления, с высоты, равной половине высоты атмосферы.

Вычисление по формуле Ньютона дает

$$a = 280 \text{ м/сек.}$$

Опыт этому резко противоречит.

Разрешение противоречия было указано Лапласом. Оно состоит в следующем. Отношение p/ρ постоянно при *изотермическом* процессе. В действительности процесс *не* изотермический, и эта зависимость несправедлива. Лаплас предложил принять вместо изотермического закона адиабатический. Это дает:

$$a = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}\gamma},$$

где

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

(C_p и C_v — теплоемкости при постоянном давлении и при постоянном объеме). Для воздуха $\gamma = 1{,}4$. При этом получается удовлетворительное совпадение с опытом.

В более позднее время стали определять γ посредством измерения a. Это имеет большое значение в связи с представлениями кинетической теории. Согласно кинетической теории (для газа, состоящего из жестких молекул)

$$\gamma = \frac{f+2}{f},$$

где f — число степеней свободы молекулы. Например, при $f=3$ (одноатомные молекулы) имеем $\gamma=1{,}67$. Кундтом и Варбургом измерение a было проделано для ртутного пара. Это — одноатомный газ, и для него получился результат, предсказанный кинетической теорией:

$$a=\sqrt{1{,}67\frac{p_0}{\rho_0}}.$$

Для благородных газов получается тот же результат.

С квантовой точки зрения весь вопрос выглядит иначе [1].

Случай Ньютона (изотермические деформации) и случай Лапласа (адиабатические деформации) принципиально отличаются от всех остальных. Только при изотермическом и адиабатическом процессах нет деградации энергии. Эти процессы обратимы. При всяком другом процессе между отдельными частями газа происходит обмен тепла при конечной разности температур — необратимый процесс, вызывающий потерю свободной энергии и затухание волны. На это указывали Релей и Стокс.

Перейдем к вопросу о колебаниях в распределенных электрических системах. Он столь же важен для нас, как вопрос о колебаниях в упругой сплошной среде.

Постараемся установить уравнения для колебаний тока в простом проводе.

Через сечение x втекло к моменту t количество электричества $Q(x)$; через сечение $x+dx$ вытекло к этому моменту количество электричества $Q(x+dx)$; ток через какое-нибудь сечение

$$I=\frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{13}$$

Количество электричества, застрявшее в элементе dx, равно

$$Q(x)-Q(x+dx)=-\frac{\partial Q}{\partial x}dx.$$

Пусть Cdx — емкость куска dx (C — емкость на единицу длины), V — его потенциал. Тогда

$$-\frac{\partial Q}{\partial x}dx=Cdx\cdot V, \tag{14}$$

---

[1] [Ср. 10-ю и 11-ю лекции части I].

или, если мы возьмем производную по времени от обеих частей и подставим (13),

$$-\frac{\partial I}{\partial x}=C\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{15}$$

Это — первое уравнение.

По закону Ома

$$Rdx\cdot I=-\frac{\partial V}{\partial x}dx-Ldx\frac{\partial I}{\partial t}. \tag{16}$$

Здесь R — сопротивление, L — индуктивность на единицу длины. Первый член правой части — разность потенциалов концов куска dx, второй — электродвижущая сила самоиндукции в этом куске.

Мы не рассматривали трения в упругой среде. Соответственно и здесь пренебрежем сопротивлением. Тогда мы получаем из (16):

$$-\frac{\partial V}{\partial x}=L\frac{\partial I}{\partial t}. \tag{17}$$

Таково второе уравнение.

Величины I и V удовлетворяют двум уравнениям: (15) и (17), подобно двум уравнениям (8) и (10) для ρ и u. Из них легко получить

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{C}\frac{\partial I}{\partial x}\right)=L\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}. \tag{18}$$

Этим уравнением часто пользуются для антенн. Если $C=\text{const}$, то получаем:

$$\frac{1}{LC}\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}. \tag{19}$$

Уравнение (18) аналогично уравнению стержня с переменным модулем упругости[1].

‹Из того, что я сейчас сказал, я ни слова не понимаю, потому что пользовался неправильными терминами.

У нас получается уравнение телеграфистов, с которым все работают, которое справедливо и для антенны. Но *оправдать то, что мы сделали, я не сумею.*

Посмотрим, что же мы сделали нехорошего.

---

[1] [Сохранился текст, написанный Л. И. Мандельштамом, в близком соответствии с которым им была прочитана часть лекции, содержащая критику изложенного выше вывода уравнения антенны. Далее приводится в угловых скобках (с небольшой редакционной обработкой) этот текст Л. И. Мандельштама. Все подчеркивания принадлежат Л. И. Мандельштаму.]

Я считаю правильным такой путь: взять какой-нибудь простой случай распространения электромагнитных волн в проводах, который действительно поддается настоящему, хорошему, строгому исследованию, — исследовать его и установить, что там делается. Тогда мы сможем понять, почему оказывается, что для одного простого случая, который практически существенен, можно пользоваться уравнением (19).

Этот путь — довольно длинный, но без него обойтись нельзя. Техники работают с уравнением (18) и получают при этом хорошие результаты, но вы сейчас увидите, что ему пока еще нет никакого оправдания.

Я говорил о потенциале. Но при переменных полях понятие о потенциале отпадает.

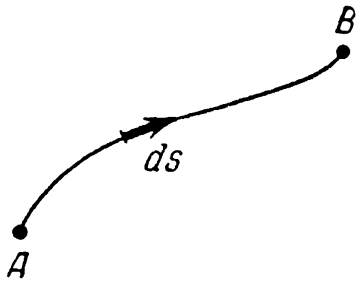


Рис. 140.

Первое уравнение Максвелла гласит:

$$-\mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}=\operatorname{rot}\mathbf{E}.$$

Пусть поле постоянно, т. е. нет зависимости от t. Тогда $\partial\mathbf{H}/\partial t=0$, и первое уравнение Максвелла обращается в следующее:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=0.$$

Поле не имеет ротации. Оно может быть выражено как градиент некоторого скаляра. Этот скаляр мы называем потенциалом. Это понятие можно ввести благодаря тому, что $\operatorname{rot}\mathbf{E}=0$; при этом $\int E_s ds$ между двумя точками A и B (рис. 140) не зависит от пути. Именно поэтому можно величину интеграла между этими двумя точками обозначить как разность потенциалов между этими двумя точками. Как только $\int E_s ds$ *зависит от пути интеграции (а при всяком нестатическом поле дело обстоит, вообще говоря, именно так), понятие потенциала отпадает, — такой величины не существует.* Написанный нами интеграл зависит не только от того, между какими точками вы его берете; он зависит также от того, по какому пути вы его берете. *Общего понятия потенциала не существует.*

Ошибка, связанная с понятием потенциала, часто делается и в случае обычного замкнутого конденсатора. Но там можно обойти указанную здесь трудность. Это связано с тем, что все электрическое поле практически сосредоточено в самом конденсаторе. Можно доказать, что внутри конденсатора все пути приводят

практически к одному и тому же значению $\int E_s ds$. В случае конденсатора можно указать класс путей, которые ведут при вычислении $\int E_s ds$ к одному и тому же результату, и эту величину можно назвать разностью потенциалов между обкладками конденсатора. В том случае, который нас теперь интересует, такого сосредоточения поля нет. Это мы должны заметить прежде всего. Но это не самое важное.

Что такое емкость элемента длины, что такое индуктивность элемента длины? Эти выражения лишены пока всякого смысла. Что мы имеем в виду, когда говорим об индуктивности катушки? Одно из определений индуктивности L таково: если через катушку пропускается ток I, то магнитная энергия равна $LI^2/2$ (другие определения ведут к тому же). Магнитная энергия катушки, если по ней идет ток, пропорциональна квадрату этого тока, и коэффициент пропорциональности называется индуктивностью.

А как обстоит дело в случае длинного провода? В каждом элементе — своя сила тока; сила тока меняется от точки к точке. Магнитное поле находится во всем пространстве. Магнитное поле от одного элемента прикладывается к магнитному полю от другого элемента. Но ведь энергия пропорциональна *квадрату* магнитного поля. *Магнитной энергии от одного элемента вообще не существует, есть только суммарная энергия всего магнитного поля, которая не разлагается на слагаемые так, что каждое слагаемое принадлежит одному элементу, другое — другому.* Нельзя говорить: вот энергия от этого элемента, вот энергия от другого. Нельзя говорить: магнитная энергия состоит из слагаемых, пропорциональных I^2 в отдельных элементах длины, — нет таких слагаемых. Но именно такое представление лежало в основе нашего определения индуктивности. Значит, если индуктивность определена так, как мы умеем ее определять, то здесь это понятие теряет всякий смысл.

Для распределенной системы нельзя говорить об индуктивности элемента длины. Можно говорить только об индуктивности целого провода, в котором течет определенный ток. Это видно уже из того, что если вы возьмете катушку вдвое большей длины, то индуктивность вовсе не увеличится вдвое; между тем, если бы название „индуктивность на единицу длины“ было оправдано, то должно было бы получиться увеличение вдвое. На самом деле нет ничего подобного. Поэтому понятие „индуктивность

элемента длины" не определено. То же самое и для емкости: выражение „емкость элемента длины" непонятно.

Какая здесь разница с механикой? Когда мы рассматриваем стержень, мы говорим о массе такого-то куска, и масса куска стержня имела определенный смысл, независимо от того, есть ли другие куски или нет. *Масса аддитивна*: сумма масс равна массе суммы. Поэтому мы могли установить дифференциальное уравнение для стержня, ограничиваясь рассмотрением одного кусочка. В электрических системах энергия всегда распределена в трехмерном пространстве. В механических системах масса может быть сосредоточена в очень малом пространстве; в электрических системах подобное положение *невозможно — существенную роль там играет поле во всем пространстве, именно это — самое существенное*. Здесь всякая задача трехмерна, здесь такое упрощение, как в механике, абсолютно недопустимо. В рассматриваемой нами электрической системе упрощение, которое мы ввели для контура, для катушки теряет смысл, между тем как для элемента стержня понятие массы не теряет смысла. Можно установить уравнение для стержня независимо от того, какой он — короткий или длинный; для нашей электрической системы такой подход абсолютно недопустим.

Я мог бы указать такую аналогию (аналогии вообще не решают вопроса, я хочу только пояснить, в чем тут дело). Представьте себе, что стержень находится в жидкости, масса которой сравнима с массой стержня. Тогда то, что мы писали для элемента стержня — масса, умноженная на ускорение, равняется силе, — ничего не дает, потому что все зависит от движения жидкости во всем пространстве; сила, действующая на элемент стержня, зависит теперь от того, например, близок к нему конец стержня или нет. Если бы в природе стержни всегда находились в каких-нибудь плотных жидкостях, то методы, основанные на рассмотрении отдельного элемента длины, были бы непригодны и для стержней, мы не пришли бы к таким методам, они ничего не давали бы. Принципиально и для стержня в воздухе возникает обсуждаемый нами вопрос, — нужно учесть массу воздуха. Но здесь это, к счастью, дает настолько малую поправку, что от нее можно отвлечься. *В электрическом случае это не поправка, а главное. Поэтому отвлекаться от этого никак нельзя*. Это было бы все равно, что отвлекаться от того, что мы хотим рассмотреть. В этом принципиальная разница.

Несмотря на это, можно в известном смысле спасти положение. Но для того, чтобы знать, когда можно и целесообразно вводить понятие, о котором только что шла речь, нужно взять какой-нибудь вопрос, который мы сумеем решить до конца.

Теперь поставим задачу и не будем бояться, что придется проделать некоторые вычисления. Практически мы все равно будем работать с уравнением (18), потому что оно часто является хорошим первым приближением. Но мы все-таки физики: нам нужно выяснить затруднения, связанные с обсуждаемыми понятиями. Так, как они вводятся обычно, они просто не имеют никакого смысла.>

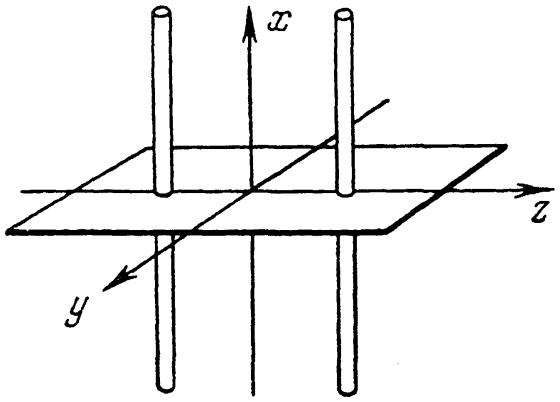


Рис. 141.

Возьмем случай двух параллельных проводов (лехерову систему, рис. 141) и разберем для этого случая распространение электромагнитных волн с точки зрения уравнений Максвелла. Мы выполним необходимую работу, если решим статическую задачу.

Если писать уравнения Максвелла в электростатической или электромагнитной системе единиц, то период собственных колебаний контура

$$\tau = 2\pi\sqrt{LC}.$$

В гауссовой системе он выражается сложнее:

$$\tau = \frac{2\pi}{c}\sqrt{LC}.$$

Здесь нам невыгодно пользоваться электрической или электромагнитной системой. Нам нужно, чтобы в уравнения вошла константа c, и мы будем поэтому пользоваться гауссовой системой. При этом магнитная энергия будет

$$W_m = \frac{L}{2c^2} I^2.$$

В гауссовой системе уравнения Максвелла таковы:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t};$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Здесь $\mathbf{j}$ — плотность тока. Если нет электровозбудительных сил, то

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$$

(λ — электропроводность).

Вот вся система максвелловских уравнений, но она еще пуста. Ее нужно связать с неэлектромагнитными явлениями, с превращениями энергии. Мы хотим знать силы, знать развиваемое количество тепла. Для этого нужно указать связь между напряженностями полей и энергией. Энергия в объеме V есть

$$W = W_e + W_m = \frac{1}{8\pi} \int_V (\varepsilon E^2 + \mu H^2)\, dV$$

(dV — элемент объема).

Кроме того, нужно еще знать, как ведут себя $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на границе тел и в бесконечности.

Уравнения Максвелла приводят к требованию, чтобы тангенциальные компоненты были непрерывны. Для упрощения переходов мы примем, что наши проводники идеальны ($\lambda = \infty$) и что объемных зарядов не существует:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0.$$

При $\lambda = \infty$ внутри проводников имеем:

$$\mathbf{E} = 0$$

— при абсолютно хорошем проводнике внутри проводов нет полей и нет токов: скин-эффект выражен до конца.

Если заряды имеются только на поверхности, плотность тока характеризуется количеством электричества, проходящим в единицу времени, не через поверхность, а через линию (рис. 142). Мы имеем тогда только поверхностные токи, которые в этом случае вообще не входят в дифференциальные уравнения.

С точки зрения электронных представлений принятие поверхностных токов есть идеализация, абстракция. Электрические силовые линии ведут себя в действительности так, как на рис. 143. Их плотность убывает непрерывно. Если мы обращаем в нуль толщину переходного слоя, то мы должны допустить разрывное изменение напряженности поля. Мы должны признать допустимость *скачка* электрического и магнитного полей.

Мы приходим к такому условию: $\mathbf{E}$ везде непрерывно, за исключением поверхности проводников, где

$$E_n = 4\pi\sigma$$

(σ — поверхностная плотность заряда).

Совершенно так же нужно поступить с токами. Убывание магнитного поля при переходе в проводник должно происходить скачком. Магнитные линии должны быть направлены тангенциально к поверхности проводника, причем

$$[\mathbf{H}, \mathbf{n}] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{i},$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности, а $\mathbf{i}$ — плотность поверхностного тока.

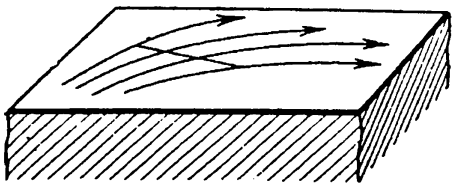


Рис. 142.

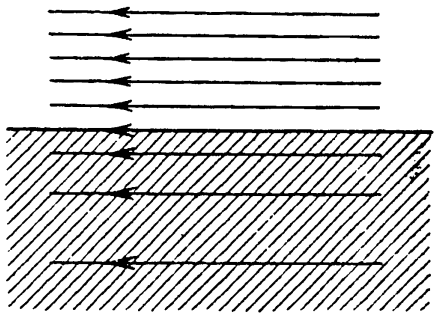


Рис. 143.

Итак, мы получаем следующие основные уравнения задачи:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \\ E_n = 4\pi\sigma,\ &[\mathbf{H}, \mathbf{n}] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{i}; \\ E_t = 0,\quad H_n &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Оказывается, что в интересующем нас случае эту систему очень просто решить.

Уравнения, относящиеся к $\mathbf{E}$ и к $\mathbf{H}$, сплетены. Но для статических задач система (20) распадается на две группы уравнений, в одну из которых входят только величины, связанные с $\mathbf{H}$, в другую — только величины, связанные с $\mathbf{E}$. Электростатическая задача решается отдельно, магнитная — тоже отдельно. Мы и разобьем задачу на две. Сначала мы решим статическую электрическую и статическую магнитную задачи. Затем мы свяжем их решения так, чтобы удовлетворить уравнениям в общем случае переменных полей.

ТРЕТЬЯ ЛЕКЦИЯ

(3/XII 1931 г.)

Рассмотрение двухпроводной линии на основе теории Максвелла. Статические задачи. Динамические задачи. Волновое уравнение. Условие применимости до-максвелловского рассмотрения. Постановка математической задачи о колебаниях распределенной системы; граничные и начальные условия.

Мы перешли в прошлый раз к вопросу об электрических колебаниях в системе из параллельных проводов.

Мы считаем проводники идеальными. В этом случае внутри проводников

$$\mathbf{E}=0, \quad \mathbf{H}=0$$

и, кроме того, на поверхности проводников вектор **E** направлен перпендикулярно поверхности, а вектор **H** — тангенциально к ней:

$$E_{\parallel}=0, \quad H_{\perp}=0.$$

Мы должны теперь связать с **E** и **H** поверхностные плотности тока и заряда (это почти что вопрос обозначений).

Мы сделаем следующее первое предположение (потом мы его оправдаем). Мы предположим, что **E** и **H** лежат в плоскостях, перпендикулярных к осям проводов. Мы имеем тогда:

$$\varepsilon \oint E_n ds = 4\pi e_1, \tag{1}$$

$$\oint H_s ds = \frac{4\pi}{c} I, \tag{2}$$

где интегралы берутся по замкнутой линии, охватывающей один из проводов; e_1 есть заряд на единицу длины этого провода. Уравнение (1) мы можем написать на основании того, что

$$\varepsilon \int E_n dS = 4\pi e_1,$$

где интеграл взят по боковой поверхности цилиндра единичной высоты; так как для него $dS = 1 \cdot ds$, то

$$\int E_n dS = \oint E_n ds.$$

Согласно Максвеллу, уравнения (1) и (2) являются, в сущности, определениями тока и заряда. По Максвеллу, все дело в поле, а „сила тока“ и „заряд“ — это лишь *названия* величин:

$$\frac{c}{4\pi}\int H_s ds, \quad \frac{\varepsilon}{4\pi}\int E_n ds.$$

Но с нашей точки зрения сила тока и заряд — реальные вещи, в особенности с точки зрения электронной теории.

Энергия в некотором объеме V есть

$$W=\frac{1}{8\pi}\int(\varepsilon E^2+\mu H^2)\,dV.$$

Часто, излагая уравнение Максвелла, ничего не говорят об энергии. Но, по моему мнению, переход от уравнений Максвелла к другим явлениям дается именно этой зависимостью — зависимостью энергии от **E** и **H**. Без нее вся теория слепа, так как на опыте мы исследуем электрические явления через неэлектрические (механические, тепловые и т. п.). Переход от одних к другим совершается с помощью выражения энергии.

Рассмотрим случай, когда поле *статическое*.

Пусть **E** и **H** не зависят от времени, т. е.

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}=0, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}=0.$$

В этом случае уравнения (20) предыдущей лекции распадаются на две группы: одну для **E**, другую для **H**. Получаются две совершенно независимые задачи: электростатическая и магнитостатическая. Если же поля переменные, то сразу получается связь между электрическими и магнитными величинами.

Основную задачу мы решим сразу, если будут решены обе стационарные (статические) задачи.

Вместо электрического поля, связанного с зарядом e_1, и магнитного поля, связанного с током I, мы введем величины:

$$\mathbf{E}_0=\varepsilon\frac{\mathbf{E}}{e_1}, \quad \mathbf{H}_0=c\frac{\mathbf{H}}{I}. \tag{3}$$

Мы делаем это для того, чтобы лучше выявить связь между обеими стационарными задачами. В переменных $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ уравнения получают простое написание. Заметим прежде всего, что

$$\oint E_{0n}ds=4\pi, \quad \oint H_{0s}ds=4\pi.$$

Начнем с электростатической задачи. В этой задаче

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=0, \quad \operatorname{div}\mathbf{E}=0. \tag{4}$$

Возьмем сперва хорошо известный случай концентрического кабеля (рис. 144). (Практически нас больше интересует случай двух параллельных проводов. Он будет подробно разобран на семинаре).

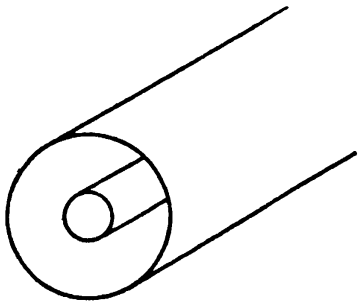


Рис. 144.

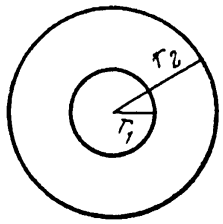


Рис. 145.

В кабеле поле радиально, причем, как известно из элементарных курсов,

$$E=\frac{2e_1}{\varepsilon r}.$$

Так как мы рассматриваем электростатический случай, то можно ввести потенциал

$$\psi=-\frac{2e_1}{\varepsilon}\ln r.$$

Подсчитаем емкость на единицу длины кабеля:

$$C=\frac{e_1}{\psi_1-\psi_2}=\frac{\varepsilon}{2\ln(r_2/r_1)}.$$

Энергия находится в слое между металлическими цилиндрами и равна (на единицу длины)

$$W=\frac{e_1^2}{2C}=\frac{e_1^2}{\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

С этим выражением связана одна очень важная вещь, которая имеет существенное значение и для наших колебательных задач.

Попробуем перейти к случаю *одного* бесконечного заряженного цилиндра. Пусть $r_2\to\infty$. Тогда

$$C\to 0, \quad W\to\infty.$$

Итак, если мы имеем дело с *одним* бесконечным проводом, то из задачи о концентрическом кабеле мы для него ничего не получим,

мы приходим к нелепости. Это означает, что в случае бесконечного провода вторая обкладка *никогда* не бывает безразлична.

Возьмем для сравнения случай концентрических шаров с радиусами r_1 и r_2 (рис. 145). Здесь

$$\text{емкость} = \frac{\text{заряд}}{\text{разность потенциалов}} = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

Если $r_2 \to \infty$, то емкость стремится к r_1. В этом и только в этом смысле говорят о емкости *одного* проводника. Это понятие имеет смысл только для проводника, конечного во всех направлениях. Для одного бесконечного цилиндра емкости не существует. Поэтому говорить о емкости на единицу длины одного бесконечно длинного проводника — абсурд. Если вторая обкладка находится на расстоянии, не очень большом по отношению к длине цилиндрического проводника, ее влияние существенно.

Таким образом, мы должны заранее сказать, что нельзя строить теорию для одного бесконечно длинного провода. Но если у нас n проводов и сумма их зарядов равна нулю, то все эти затруднения отпадают. Мы будем рассматривать именно тот случай, когда

$$\sum_i e_i = 0 \tag{5}$$

(e_i — заряд i-го провода на единицу длины). Можно считать, что симметричная лехерова система удовлетворяет этому условию, если $d/l \ll 1$ (d — расстояние между проводами, l — их длина) и если расстояние до земли очень велико. Но если она несимметрична, условие (5) не выполнено. При измерениях с такой лехеровой системой начинаются всякие неприятности, и мы видим теперь, как это связано со всей теорией.

Пусть ось x направлена вдоль проводов (рис. 141). Тогда все величины, входящие в наши уравнения, не зависят от x.

Будем искать функцию φ, такую, что

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Потребуем кроме того, чтобы φ была постоянна на каждом проводе и чтобы на первом проводе было

$$\oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 4\pi,$$

а на втором проводе

$$\oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = -4\pi.$$

Если такая функция найдена, то, взяв

$$\mathbf{E}_0 = -\operatorname{grad} \varphi, \tag{6}$$

мы получим поле $\mathbf{E}_0$, удовлетворяющее всем поставленным условиям. В самом деле, так как

$$E_{0x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

а φ от x не зависит, то $\mathbf{E}_0$ перпендикулярно оси x. Далее, $\operatorname{rot} \mathbf{E}_0$ равен нулю, так как $\mathbf{E}_0$ есть градиент скаляра; $\operatorname{div} \mathbf{E}_0$ равна нулю в силу дифференциального уравнения для φ. Остается еще условие, что $\mathbf{E}_0$ перпендикулярно к проводнику. Но если φ на проводнике постоянно, то $\operatorname{grad} \varphi$ перпендикулярен к его поверхности.

Далее

$$\mathbf{E} = \frac{e_1}{\varepsilon} \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \psi,$$

где ψ — обычный потенциал:

$$\psi = -\frac{e_1}{\varepsilon} \varphi.$$

Для статического случая можно определить емкость C на единицу длины. Определяется она так:

$$C = \frac{e_1}{\psi_1 - \psi_2} = \frac{e_1}{\int\limits_1^2 E_s ds} = \frac{\varepsilon}{\int\limits_1^2 E_{0s} ds}. \tag{7}$$

Мы выразили ее через $\mathbf{E}_0$.

Я думаю, что все это известно, и хотел лишь написать, что это имеет место в общем случае.

Менее известна соответствующая магнитная задача. Чем она отличается от электрической? Здесь, аналогично (4),

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H}_0 = 0,$$

но в отличие от электростатики — и это, на первый взгляд, кажется немного затруднительным — здесь тангенциальные слагающие на проводниках отличны от нуля: на первом проводнике

$$\oint H_{0\tau} ds = 4\pi. \tag{8}$$

Я утверждаю, однако, что, зная φ, мы легко найдем $\mathbf{H}_0$, положив

$$H_{0x}=0, \quad H_{0y}=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad H_{0z}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}. \tag{9}$$

В самом деле, при этом

$$\operatorname{div}\mathbf{H}_0=\frac{\partial H_{0x}}{\partial x}+\frac{\partial H_{0y}}{\partial y}+\frac{\partial H_{0z}}{\partial z}=0$$

и

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_0=0,$$

так как

$$\operatorname{rot}_x\mathbf{H}_0=\frac{\partial H_{0z}}{\partial y}-\frac{\partial H_{0y}}{\partial z}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0,$$

$$\operatorname{rot}_y\mathbf{H}_0=\frac{\partial H_{0x}}{\partial z}-\frac{\partial H_{0z}}{\partial x}=0,$$

$$\operatorname{rot}_z\mathbf{H}_0=\frac{\partial H_{0y}}{\partial x}-\frac{\partial H_{0x}}{\partial y}=0.$$

Легко видеть, что $\mathbf{H}_0$ удовлетворяет также условиям на поверхности проводников. Заметим, что скалярное произведение $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$ равно нулю, т. е. $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{H}_0$. Но мы доказали, что $\mathbf{E}_0$ перпендикулярно к поверхности проводника. Следовательно, $\mathbf{H}_0$ тангенциально к этой поверхности.

Не трудно далее убедиться, что $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ по абсолютной величине равны друг другу. На основании (6) и (9) имеем:

$$H_0^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2=E_0^2.$$

Следовательно, если

$$\oint E_{0n}ds=4\pi$$

(а это условие у нас выполнено), то и

$$\oint H_{0s}ds=4\pi,$$

т. е. выполнено условие (8).

В только что решенной нами задаче о стационарном токе можно ввести понятие индуктивности на единицу длины, соответственно понятию емкости на единицу длины в электростатической задаче.

Одно из определений самоиндукции есть

$$\int\mu H_n dS=\frac{1}{c}LI,$$

где слева стоит поток магнитной индукции через контур, по которому течет ток I. Возьмем наш случай. Так как $\mathbf{H}$ пропорционально I, то поток магнитной индукции, проходящий через поверхность $ABCD$ (рис. 146), где $AB=CD=1$, мы можем представить в таком виде:

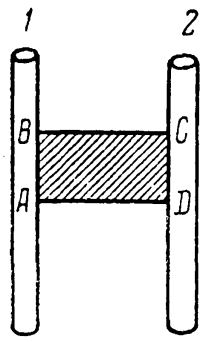


Рис. 146.

$$\mu \int H_n dS = \frac{L}{c} I,$$

где L по определению — индуктивность на единицу длины.

Заменяя $\mathbf{H}$ через $\mathbf{H}_0$, а интеграл по поверхности — интегралом по пути от провода *1* до провода *2*, получаем:

$$\frac{\mu}{c} \int_1^2 H_{0n} ds = \frac{L}{c}.$$

На основании соотношения между $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{E}_0$ можно написать:

$$\frac{\mu}{c} \int_1^2 E_{0s} ds = \frac{L}{c},$$

откуда

$$L = \mu \int_1^2 E_{0s} ds. \tag{10}$$

Из сравнения (7) и (10) получается:

$$CL = \varepsilon\mu. \tag{11}$$

Это очень важное соотношение. L и C зависят от расположения и формы проводников, но их произведение зависит только от свойств среды, в которой находятся проводники. Для воздуха имеем с большой точностью

$$CL = 1.$$

О емкости и индуктивности на единицу длины здесь можно говорить благодаря тому, что электрическое и магнитное поля перпендикулярны оси x; поэтому как в электрическом, так и в магнитном поле можно выделить отдельные *слои*.

До сих пор ток и заряд у нас были постоянны. Пусть теперь

$$I = I(x, t), \quad e_1 = e_1(x, t).$$

Я утверждаю, что картина поля такова: **E** и **H** остаются в плоскостях, перпендикулярных оси x (электрическое и магнитное поля попрежнему не имеют x-компонент), и в каждой такой плоскости электрическое и магнитное поле связаны с e_1 и I так же, как в статическом случае. При этом величины полей не зависят от x. До сих пор электростатическая и „токовая" задачи были независимы. Я утверждаю, что теперь между ними существует определенная связь.

Докажем эти утверждения.

Ясно, что при только что описанной картине с дивергенциями все остается в порядке, так как попрежнему членов с $\partial/\partial x$ в них не будет, а члены с $\partial/\partial y$ и $\partial/\partial z$ останутся прежними. Посмотрим, как обстоит дело с роторами. Имеем:

$$c \operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Для произвольных скаляра φ и вектора **A** имеем:

$$\operatorname{rot} \varphi \mathbf{A} = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{A} + [\nabla \varphi, \mathbf{A}]$$

(эту общую формулу легко вывести). Поэтому

$$\operatorname{rot} I \mathbf{H}_0 = I \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 + [\nabla I, \mathbf{H}_0].$$

Но $\operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = 0$, а ∇I имеет только компоненту по оси x, равную по величине $\partial I/\partial x$. Векторное произведение $[\nabla I, \mathbf{H}_0]$ имеет направление вектора $\mathbf{E}_0$ (это ясно из рассмотрения направлений векторов $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$) и равно по величине $-\frac{\partial I}{\partial x}\mathbf{E}_0$. Следовательно,

$$c \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{\partial I}{\partial x}\mathbf{E}_0.$$

Так как

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial e_1 \mathbf{E}_0}{\partial t}$$

и $\mathbf{E}_0$ не зависит от t, мы можем написать первое уравнение Максвелла в таком виде:

$$-\frac{\partial I}{\partial x}\mathbf{E}_0 = \frac{\partial e_1}{\partial t}\mathbf{E}_0.$$

Получается следующий результат: чтобы удовлетворялось первое уравнение Максвелла, должно быть

$$-\frac{\partial I}{\partial x} = \frac{\partial e_1}{\partial t}. \qquad (12)$$

Аналогично доказывается, что второе уравнение Максвелла удовлетворяется, если

$$-\frac{\partial e_1}{\partial x}=\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial I}{\partial t}. \tag{13}$$

Таким образом, мы получим точное, строгое решение нашей полной задачи, если возьмем:

$$\mathbf{E}=\frac{e_1}{\varepsilon}\mathbf{E}_0,\quad \mathbf{H}=\frac{I}{c}\mathbf{H}_0,$$

где $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ — решения статических задач для соответствующего x, а e_1 и I удовлетворяют уравнениям (12) и (13). Единственная трудность при решении задачи состоит в том, чтобы найти φ.

В первую очередь нас интересуют токи. Дифференцируя уравнения (12) и (13) и исключая e_1, получаем:

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 I}{\partial x^2},$$

или

$$a^2\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}, \tag{14}$$

где

$$a=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{15}$$

Для рассмотренного случая мы совершенно строго получили волновое уравнение. Скорость распространения равна a. Она не зависит от расстояния между проводниками; чтобы знать скорость распространения волн, не нужно знать в отдельности L и C. Но если нужно знать энергию, то необходимо ввести емкость и индуктивность на единицу длины.

На основании (11) можно переписать уравнения (12) и (13) в таком виде:

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial I}{\partial x}&=\frac{\partial e_1}{\partial t},\\ -\frac{1}{C}\frac{\partial e_1}{\partial x}&=\frac{L}{c^2}\frac{\partial I}{\partial t}.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Введем посредством соотношения

$$e_1=CV$$

величину V. Тогда уравнения (16) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial I}{\partial x} &= C\frac{\partial V}{\partial t}, \\ -\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{L}{c^2}\frac{\partial I}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Мы пришли к тем же уравнениям, что и в прошлый раз, но тогда способ их получения был явно неправильный. Мы видим теперь, что понятие разности потенциалов в некотором отношении сохраняет здесь свой смысл.

Как уже говорилось, понятие разности потенциалов, вообще говоря, неприменимо к переменным полям, потому что в таких полях интеграл $\int_1^2 E_s ds$, взятый по различным путям между одними и теми же точками проводов, различен. Но в данном случае можно выделить *класс* путей такой, что $\int_1^2 E_s ds$, взятый по любому из них между двумя любыми точками проводников, имеет одинаковое значение. Это — *пути, лежащие в плоскостях, перпендикулярных направлению проводов.*

В рассмотренном нами случае можно говорить о емкости и индуктивности на единицу длины, рассматривая энергию отдельных слоев, перпендикулярных направлению проводов. Это имеет смысл лишь потому, что **E** и **H** лежат в плоскостях, перпендикулярных проводам, и в этих плоскостях поля квазистатические. Мы выяснили в итоге, с какими условиями связана возможность простого, до-максвелловского рассмотрения.

Если взять лехерову систему очень больших размеров, то мы имеем право пользоваться в качестве приближения теорией, относящейся к бесконечно длинной системе. Но как быть в случае простой антенны? Изложенная теория почти справедлива для многих практически важных случаев, например для горизонтальной антенны, находящейся на расстоянии от земли, малом по сравнению с ее длиной. Остается вопрос, как обстоит дело в случае антенны в виде так называемого открытого проводника (вибратора)? Этот вопрос требует особого рассмотрения.

Мы убедились, что ряд важнейших физических проблем приводит к одномерному волновому уравнению. Нам нужно теперь заняться исследованием колебаний одномерных распределенных

систем. Нам нужно вычитать из этих уравнений ответы на ряд физических вопросов.

Начнем с рассмотрения несколько более сложного уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Eq\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\rho q\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

или, считая, что q — константа, и обозначая $E=p(x)$,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right]=\rho(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{18}$$

Теория краевых задач и теория интегральных уравнений развивались на этом сравнительно простом примере.

Если p и ρ — постоянны, то, обозначив

$$a^2=\frac{p}{\rho}, \tag{19}$$

имеем:

$$a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{20}$$

Уравнение системы с одной степенью свободы имеет целый *класс* решений, содержащий две произвольные постоянные. Решения уравнений в частных производных образуют еще гораздо более широкий класс. Чтобы сделать задачу определенной, нужно прежде всего задать краевые условия, вовсе не связанные с данным уравнением. Само уравнение лишь в очень малой степени задает вид решения.

Уравнению с постоянными p и ρ, т. е. уравнению (20), удовлетворяет всякая функция вида

$$y=f_1(x-at)+f_2(x+at), \tag{21}$$

где f_1 и f_2 — совершенно произвольные функции. Это — чрезвычайно общее решение. Оно почти ничего не говорит о характере процесса.

Но физика ставит вполне *определенные* задачи, причем здесь возможны гораздо более разнообразные постановки задач, чем в случае сосредоточенных систем, например, такие:

1. Как побежит удар по бесконечному стержню?

2. Стержень ограничен (нужно указать при этом физические условия на концах; они могут быть, например, закреплены). Требуется найти колебание, возникающее при заданных начальных условиях.

Разнообразие физических задач, возникающих в случае распределенных систем, сказывается в следующем.

1. В характере объекта; например, в том, каковы условия на концах стержня; если они закреплены, то

$$y_{x=0}=0, \qquad y_{x=l}=0 \text{ при } t\geqslant 0$$

(l — длина стержня).

2. В начальных условиях; в случае стержня начальные условия состоят в задании распределения отклонения и скорости по всему стержню в начальный момент:

$$y(x, 0)=f(x), \qquad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t}=F(x).$$

Здесь $f(x)$ и $F(x)$ — заданные функции.

В случае стержня, закрепленного на концах, задача ставится так: нужно найти такую функцию $y(x, t)$, которая удовлетворяет:

1) уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right]=\rho(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}; \tag{1}$$

2) условиям на концах

$$y_{x=0}=0, \qquad y_{x=l}=0 \qquad (t\geqslant 0); \tag{2}$$

3) начальному условию

$$y(x, 0)=f(x) \qquad (0\leqslant x\leqslant l); \tag{3}$$

4) начальному условию

$$\frac{\partial y(x, 0)}{\partial t}=F(x) \qquad (0\leqslant x\leqslant l). \tag{4}$$

Физическая система определена только тогда, когда, кроме дифференциального уравнения, заданы условия на концах. Кроме того, мы должны рассматривать определенный опыт, — он определяется начальными условиями.

Можно ли найти такую функцию $y(x, t)$, которая удовлетворяет условиям (1)—(4)? Оказывается, что можно и что эта функция — *единственная*. Если мы нашли какое-то решение, то мы нашли то, что нужно. Это очень облегчает дело. Доказательство единственности решения имеет поэтому очень важное значение.

ЧЕТВЕРТАЯ ЛЕКЦИЯ

(9/XII 1931 г.)

Некоторые замечания о неоднородной электрической задаче. Различные краевые условия. Доказательство единственности решения и его связь с законом сохранения энергии. Способ Бернулли: разделение переменных. Постановка краевой задачи. Понятие о собственных значениях и собственных функциях.

Мы рассмотрели физическую сторону вопросов о колебаниях распределенных систем (механических и электрических) и установили, к каким типам уравнений приводят эти вопросы (в однородных задачах). В общем случае дело сводится к уравнениям типа

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial y}{\partial x}\right)=q\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{1}$$

Остановимся коротко еще раз на электрической системе. Мы рассмотрели случай параллельных проводов и *для этого случая* оправдали „домашний", до-максвелловский способ вывода — способ Кирхгофа. Он приводит к уравнениям:

$$\frac{\partial I}{\partial x}=-C\frac{\partial V}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{L}{c^2}\frac{\partial I}{\partial t}. \tag{3}$$

При этом L и C (самоиндукция и емкость на единицу длины) были постоянными. Пусть провода непараллельны, но непараллельность очень мала, т. е. на участке, сравнимом с расстоянием между проводами, последнее меняется очень мало (это — вполне определенное высказывание относительно порядка малости; в некоторых других задачах предполагается малость расстояния по отношению к длине волны). В этом случае можно пользоваться той же теорией, но считая, что C и L — функции расстояния между проводами. При этом

$$C=\frac{\varepsilon}{2\ln\frac{r_2}{r_1}},\qquad L=2\mu\ln\frac{r_2}{r_1},$$

но нужно помнить, что такой подход верен только приближенно. Погрешность здесь можно оценить.

Исключая V, мы получаем для тока уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{C}\frac{\partial I}{\partial x}\right)=\frac{L}{c^2}\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}.$$

Рассуждения, с помощью которых мы пришли к уравнениям (2) и (3), неприменимы для одного провода.

Нас интересует *конечная* струна, *конечная* лехерова система и т. п. В таких случаях нужно задать условия на концах. Для стержня, закрепленного на концах, эти условия очевидны: концы неподвижны в течение всего времени:

$$y(0,\ t)=0,\quad y(l,\ t)=0. \tag{4}$$

Уравнением (1) и этими двумя условиями движение системы еще не охарактеризовано полностью, хотя сама система характеризуется ими вполне. Заметим для сравнения с дискретными системами: то, что там задается числом уравнений [1], здесь определяется граничными условиями.

Для того, чтобы задача была определена, нужно еще задать *начальные* условия для смещения

$$y(x,\ 0)=f(x)$$

и для скорости

$$\frac{\partial y(x,\ 0)}{\partial t}=F(x).$$

Требуется решить задачу о том, как ведет себя заданная система (определенная уравнением в частных производных и граничными условиями) при заданных начальных условиях, т. е. найти $y(x,\ t)$. Прежде чем заняться решением этой задачи, рассмотрим еще некоторые другие типы возможных граничных условий.

В электрической задаче стержню с закрепленными концами соответствует лехерова система, разомкнутая на концах. На разомкнутом конце ток I должен равняться нулю, так как в противном случае на конце происходило бы накопление заряда и неограниченное нарастание напряжения.

Каковы граничные условия в случае стержня, закрепленного на одном конце и свободного на другом (рис. 147)?

Сила, возникающая вследствие деформации, есть

$$F=-E\frac{\partial y}{\partial x}.$$

На свободном конце эта сила равна нулю. В самом деле, в противном случае на бесконечно малый концевой элемент стержня действовала бы конечная сила и возникали бы бесконечные уско-

[1] [См. 30-ю лекцию части I, уравнения (1).]

рения. Следовательно, если мы не допускаем возможности бесконечных ускорений, здесь должно быть

$$y(0, t)=0, \quad \frac{\partial y(l, t)}{\partial x}=0.$$

Если оба конца свободны, то

$$\frac{\partial y(0,t)}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial y(l,t)}{\partial x}=0. \tag{5}$$

Таким образом, в зависимости от задачи получаются разнообразные граничные условия.

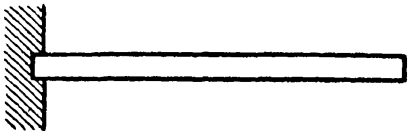


Рис. 147.



Рис. 148.

Обратимся снова к электрическим системам.

Пусть провод заземлен (рис. 148). Легко видеть, такое требование должно выполняться на заземленном конце. На нем напряжение равно нулю, т. е. $V=0$, откуда $\frac{\partial V}{\partial t}=0$. Следовательно, на основании (2) на заземленном конце (при $x=0$) имеем:

$$\frac{\partial I}{\partial x}=0.$$

Если заземлены оба конца, то это требование должно выполняться как при $x=0$, так и при $x=l$.

В некоторых учебниках в случае условий типа (4) говорят о граничных задачах первого рода, а в случае условий типа (5) — о граничных задачах второго рода. Но, как мы видели, возможны и смешанные задачи.

Есть еще один тип граничных условий, который для нас очень важен.

Пусть провод заземлен на одном конце через конденсатор (рис. 149, *а*). Этому соответствует стержень, закрепленный через пружину (рис. 149, *б*). Стержень с сосредоточенной массой на конце (рис. 150, *б*) соответствует проводу, заземленному через индуктивность (рис. 150, *а*). Такие задачи не менее важны для нас, чем „классические“ задачи первого и второго рода.

Остановимся на случае провода, заземленного через емкость. Напишем для правого конца уравнение

$$-\frac{\partial I}{\partial x}=C\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{6}$$

Здесь I — ток на конце провода; V — напряжение между точками провода A, B. Напряжение на конденсаторе есть

$$V=\frac{Q}{C_0}, \tag{7}$$

где Q — заряд конденсатора. В конденсаторе течет ток

$$I=\frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{8}$$

Ток, определяемый этим соотношением, — тот же ток, что течет через конец провода. Напряжение, определяемое соотношением

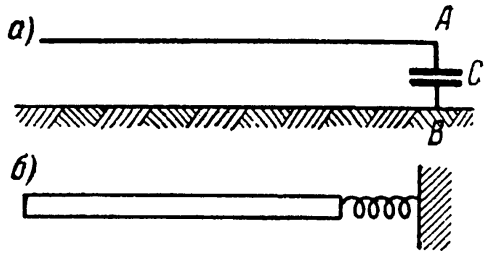


Рис. 149.

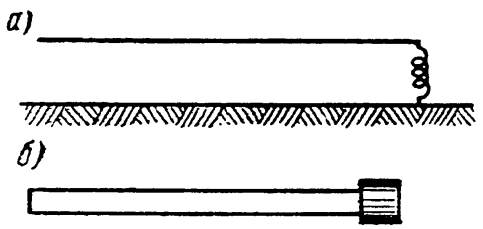


Рис. 150.

(7), совпадает с напряжением между точками A и B. Следовательно, мы можем подставить (7) и (8) в (6), что дает:

$$-\frac{\partial I}{\partial x}=\frac{C}{C_0}I. \tag{9}$$

Таково условие на конце, заземленном через конденсатор. Аналогичное условие мы получим, если стержень закреплен через пружину.

Возможны также граничные условия более сложные, чем (9), но пока что мы не будем их рассматривать. Заметим только, что в случае индуктивности (массы) на конце, граничное условие имеет вид, отличный от (9).

Если конденсатор включен на конце $x=0$, мы получим, рассуждая так же, как для конца $x=l$;

$$\frac{\partial I}{\partial x}=\frac{C}{C_0}I \tag{10}$$

(знак здесь другой).

Граничные условия (9) и (10) являются более общими, чем (4) или (5). В частности, они в себя включают случаи, рассмотренные ранее. Действительно, пусть на конце $x=0$ $C_0=0$. Чтобы $\partial I/\partial x$ оставалось конечным, необходимо $I(0,t)=0$. Это — случай разомкнутого конца. Пусть $C_0=\infty$. Здесь должно быть $\partial I(0,t)/\partial x=0$. Это — случай заземленного конца.

Таким образом, мы охватим все указанные случаи, если составим окончательно такую схему:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right]=q(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}; \tag{11а}$$

$$\frac{\partial y(0,t)}{\partial x}=\alpha y(0,t),\quad -\frac{\partial y(l,t)}{\partial x}=\beta y(l,t)\quad (\text{при } t\geqslant 0); \tag{11б}$$

$$y(x,0)=f(x),\quad \frac{\partial y(x,0)}{\partial t}=F(x). \tag{11в}$$

Наша задача — математическая обработка этой системы уравнений. В нее входят параметры $p(x)$, $q(x)$, α, β. По своему физическому смыслу параметры p и q во всем интервале значений x не равны нулю и положительны. Этому соответствует в дискретном случае положительная дефинитность квадратичных форм T и U.

Постоянные α и β равны в электрическом случае:

$$\alpha=C/C_0,\quad \beta=C/C_1.$$

По своему физическому смыслу они также существенно положительны.

Условия положительности величин p, q, α и β — не мелочь. Это предположение, необходимое для вывода ряда фундаментальных теорем, которые мы далее докажем. В частности, мы предполагаем, что p и q нигде не равны нулю. В случае, если это условие не выполнено, возникает *другая* задача, математические рассуждения будут другие.

Итак, будем исследовать математически нашу схему (11).

Пусть мы нашли какое-нибудь решение $y(x,t)$, удовлетворяющее этой схеме. Можем ли мы утверждать, что наша физическая проблема решена?

Можно доказать, что условия (11) достаточны для однозначного определения функции y. Поэтому, если найдено *какое-то* решение системы (11), то найдено *правильное* решение поставленной задачи. Это доказывается с помощью общего приема, и притом довольно легко. Доказательство имеет прямой физический смысл.

Вернемся к уравнениям (2) и (3). Умножая первое на V, второе — на I и складывая, имеем:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(IV)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{CV^2}{2}+\frac{LI^2}{2c^2}\right).$$

Проинтегрируем это равенство по x между какими-нибудь пределами x_1 и x_2:

$$(IV)_1-(IV)_2=\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{CV^2}{2}+\frac{LI^2}{2c^2}\right)dx. \tag{12}$$

Интеграл выражает полную электрическую и магнитную энергию всего взятого куска провода $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Таким образом, справа написано приращение за единицу времени полной энергии этого куска. Мы останемся в согласии с законом сохранения энергии, если предположим, что в любой точке IV есть количество энергии, проходящее в единицу времени через соответствующую плоскость $x=\text{const}$. Уравнение (12) получает тогда такое толкование: увеличение энергии куска (x_1, x_2) равно разности вошедшей и вышедшей энергии. Это — частный случай теоремы Пойнтинга: поток энергии выражается здесь произведением тока на напряжение.

Составим для механического случая уравнения, аналогичные смешанным уравнениям для I и V. Напишем:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\varphi, \qquad \frac{\partial y}{\partial t}=\psi. \tag{13}$$

Уравнения (11а) и (13) связывают φ и ψ соотношениями:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}(p\varphi)=q\frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Умножив первое уравнение на φ, второе — на $-\psi$ и сложив, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x}(p\varphi\psi)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p\varphi^2}{2}+\frac{q\psi^2}{2}\right).$$

Интегрируя это от 0 до l, находим далее:

$$p\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\Bigg|_0^l=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\left\{\frac{p}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\frac{q}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right\}dx. \tag{14}$$

Мы вывели эту зависимость независимо от какой-либо физической интерпретации: это — математическое соотношение. Но легко вычи-

тать физический смысл входящих в него выражений. Действительно, справа стоит производная по времени от суммы потенциальной и кинетической энергии стержня. Следовательно,

$$-P\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t} \tag{15}$$

— это количество энергии, проходящей за единицу времени через сечение в положительном направлении x. Можно рассматривать это выражение как поток энергии.

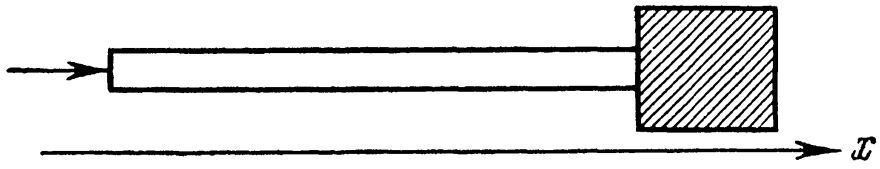


Рис. 151.

Из выражения (15) вытекают интересные следствия.

Пусть мы *толкаем* стержнем груз (рис. 151). Обратим внимание на знаки. Стержень сжимается, причем справа — меньше, чем слева ($\partial y/\partial x < 0$); со временем сжатие нарастает, т. е. скорость $\partial y/\partial t > 0$; значит, поток энергии положителен; он течет слева направо. Пусть теперь мы *тянем* груз с помощью прикрепленного к нему стержня. Тогда $\partial y/\partial x$ меняет знак, но $\partial y/\partial t$ тоже меняет знак. Поток энергии имеет, следовательно, то же направление, что и в первом случае, т. е. энергия течет теперь в направлении, обратном движению стержня. Красивый пример — поток энергии в ременной передаче (рис. 152). Работающая (верхняя) часть ремня движется в одном направлении, а поток энергии по ремню — в обратном направлении.

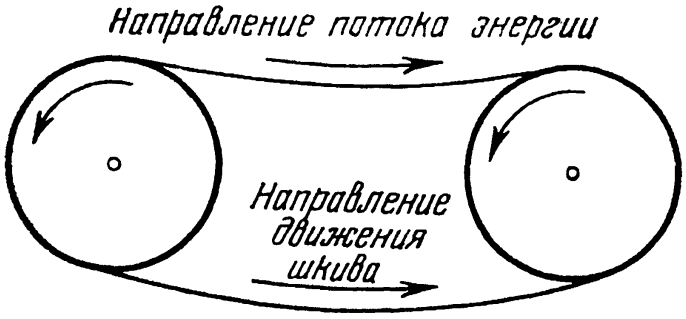


Рис. 152.

Вернемся к математике, к вопросу об однозначности решений. Пусть y_1 и y_2 — две функции, удовлетворяющие схеме (11). Образуем новую функцию

$$y = y_1 - y_2.$$

Функция y тоже удовлетворяет дифференциальному уравнению (11а), так как оно линейно и однородно. Поскольку граничные условия (11б) тоже линейны и однородны, y удовлетворяет и граничным условиям. Но как обстоит дело с *начальными* условиями?

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f(x), \quad \frac{\partial y_1}{\partial t} = F(x), \\ y_2 &= f(x), \quad \frac{\partial y_2}{\partial t} = F(x), \end{aligned}\right\} \quad (t=0).$$

Отсюда видно, что разность y_1 и y_2 удовлетворяет другим начальным условиям, а именно:

$$y(x,0)=0, \quad \frac{\partial y(x,0)}{\partial t}=0). \tag{16}$$

Спрашивается, можем ли мы решить уравнение при этих начальных условиях? Оказывается, что им удовлетворяет только решение, тождественно равное нулю:

$$y=y_1-y_2\equiv 0.$$

Следовательно, если есть два решения, удовлетворяющие всей схеме (11), то они совпадают, т. е. она имеет только *одно* решение.

Докажем, что решение, удовлетворяющее схеме (11а), (11б) и (16) (с нулевыми начальными условиями), тождественно равно нулю. Проинтегрируем соотношение (14) от 0 до t:

$$\int_0^t \left[p\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\right]_0^l dt = \int_0^l \left[\frac{p}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \frac{q}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right]_0^t dx.$$

При $t=0$ имеем $y=0$ для всех значений x, а следовательно, и $\partial y/\partial x=0$. Кроме того, при $t=0$ имеем всегда $\partial y/\partial t=0$. Следовательно, при $t=0$ правая часть равна нулю, и мы имеем:

$$\int_0^t \left[p\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\right]_0^l dt = \int_0^l \left[\frac{p}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_t^2 + \frac{q}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_t^2\right] dx.$$

Преобразуем левую часть, пользуясь граничными условиями (11б). Получаем:

$$\left[p\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\right]_0 = \alpha p_0 y_0 \frac{\partial y_0}{\partial t} = \frac{\alpha p_0}{2}\frac{\partial y_0^2}{\partial t},$$

$$\left[p\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\right]_l = -\beta p_l y_l \frac{\partial y_l}{\partial t} = -\frac{\beta p_l}{2}\frac{\partial y_l^2}{\partial t},$$

и следовательно,

$$-\alpha p_0 y_0^2 - \beta p_l y_l^2 = \int_0^l \left[\frac{p}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \frac{q}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right] dx, \tag{17}$$

где все величины y_0, y_l, $\partial y/\partial x$, $\partial y/\partial t$ взяты для момента t.

Мы видим теперь, почему существенны знаки величин α, β, p и q. Так как $\alpha > 0$, $\beta > 0$, слева стоит существенно отрицательная величина, справа стоит существенно положительная величина. Равенство (17) возможно, только если

$$y_0 = 0, \quad y_l = 0,$$

и для любого x

$$\frac{\partial y}{\partial x} \equiv 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} \equiv 0.$$

Это — единственная возможность удовлетворить схеме (11а), (11б) и (16). Следовательно, y есть константа, а так как для $t = 0$ она равняется нулю, то она есть нуль для любого t, и, следовательно,

$$y_1 - y_2 = 0;$$

решения y_1 и y_2 совпадают. Способ доказательства единственности, основанный на составлении разности, является очень общим.

Физически ясно, в чем тут дело: y — некоторое движение, при котором в начальный момент в стержне нет энергии; с концов энергия не поступает, а значит, энергии не будет и в последующие моменты времени. Но сейчас необходимости в этом толковании нет: мы доказали единственность решения математически.

Мы переходим ко второй проблеме. Каким способом действительно решают задачу о колебаниях струны, стержня, системы проводов? Есть общий путь, не зависящий от вида функций $p(x)$ и $q(x)$. Сначала мы пойдем этим общим путем, не специализируя вида этих функций, а затем рассмотрим частный случай, когда p и q постоянны. Здесь решение доводится до конца (при не постоянных параметрах решение доводится до конца лишь в отдельных случаях). Далее мы снова вернемся к переменным p и q, после того как на частном случае постоянных p и q выясним ряд фундаментальных свойств, сохраняющихся и для общего случая. Для последнего мы сможем выяснить все основные свойства движения.

Существуют два различных способа нахождения функции, удовлетворяющей волновому дифференциальному уравнению в слу-

чае постоянных параметров: способ Даламбера и способ Бернулли. Можно, однако, показать, что они дают одно и то же. Мы воспользуемся способом Бернулли, который больше подходит для задачи о стоячих волнах и, повидимому, в общем случае переменных параметров является единственным.

Постараемся найти частное решение вида

$$y = \varphi(x)\psi(t). \tag{18}$$

В левой части дифференциального уравнения (11а) дифференцирование производится только по x, в правой части — только по t. Подставляя (18) в (11а), получаем:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi}{dx}\right]\psi(t) = q(x)\varphi(x)\frac{d^2\psi}{dt^2}.$$

Разделим обе части уравнения на $q(x)\varphi(x)\psi(t)$:

$$\frac{1}{q(x)\varphi(x)}\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}\right] = \frac{1}{\psi(t)}\frac{d^2\psi(t)}{dt^2}.$$

Теперь заметим следующее: правая часть зависит только от t, левая — только от x. Но левая и правая части должны быть равны между собой при любых x и t. Это возможно, только если правая часть не зависит от t, а левая не зависит от x (если бы при изменении t правая часть менялась, то ввиду того, что левая часть не меняется, равенство правой и левой частей было бы невозможно). Таким образом, левая и правая части равны *одной* и той же постоянной. Обозначив ее λ, получаем *два* уравнения:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \lambda\psi, \qquad \frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi}{dx}\right) = \lambda q\varphi.$$

Чему равна постоянная λ — здесь безразлично: при всяком ее значении получается решение.

Мы сделали громадный шаг вперед: вместо одного уравнения в частных производных мы имеем два: но зато *обыкновенных* дифференциальных уравнения.

Граничные условия не зависят от t. Следовательно, им можно удовлетворить подбором φ (помня о доказанной теореме единственности). Таким образом, решение задачи сводится к следующему:

1. Решить уравнение

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \lambda\psi. \tag{19}$$

2. Решить уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi}{dx}\right)=\lambda q\varphi \tag{20}$$

при граничных условиях:

$$\begin{aligned}&\frac{d\varphi}{dx}=\alpha\varphi \qquad \text{при } x=0,\\ &\frac{d\varphi}{dx}=-\beta\varphi \qquad \text{при } x=l.\end{aligned} \tag{21}$$

Уравнение (19) решается просто. Для уравнения же (20) и здесь имеет место совершенно новая постановка задачи — классическая краевая задача.

До сих пор нам приходилось находить решение дифференциального уравнения при заданных начальных условиях. Это — задача Коши. Вообще говоря, „приличное“ уравнение имеет для заданных начальных условий одно и только одно решение: можно отыскать такое φ, чтобы при $x=0$ было

$$\varphi=a, \qquad \frac{d\varphi}{dx}=b,$$

где a и b — заданные постоянные. Но теперь постановка задачи для $\varphi(x)$ — совершенно другая. Требования (21) относятся не к одной точке, а к *двум*. Если λ задано и заданы условия вида (21) для двух значений x, то, вообще говоря, *не существует* требуемого решения. Типичная особенность такой задачи как раз и заключается в том, что, вообще говоря, при фиксированном уравнении (20) она *не имеет* решения.

Нам приходит на помощь то обстоятельство, что λ заранее не определено. Оказывается, что при положительных α, β, p и q существуют такие значения λ, при которых задача (20), (21) имеет решение. Вообще говоря, таких значений — бесконечное число, они образуют счетное множество. Задача и заключается в нахождении таких значений λ и в нахождении соответствующих им функций $\varphi(x)$.

Итак нужно:

1) найти указанные значения λ; они называются характеристическими или собственными числами краевой задачи;

2) при каждом таком значении λ решить уравнение (20) с условиями (21), т. е. найти удовлетворяющие им функции; они называ-

ются фундаментальными или собственными функциями данной краевой задачи.

Мы получим, таким образом, ряд частных решений нашей задачи.

Мы проделаем это на простых примерах, взяв p и q постоянными, и получим при этом в качестве решений простые, хорошо известные функции. В самом общем случае при заданных p и q, зависящих от x, мы не умеем интегрировать уравнение (20): нет таких обычных „легких" функций, которые бы ему удовлетворяли.

Далее возникает вторая фундаментальная задача — приспособить решение к заданным начальным условиям. Она сводится к очень конкретной и определенной математической операции — к разложению данной функции, удовлетворяющей определенным условиям, в ряд по собственным (фундаментальным) функциям данной задачи. Это — одна из наиболее изящных задач математической физики.

ПЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(13/XII 1931 г.)

Уравнение, сходное с уравнением Шрёдингера. Периодические краевые условия. Собственные числа оператора. Основные свойства собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля. Вопрос о разложимости функции в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля. Вопрос сходимости.

В прошлый раз мы говорили о том, как можно подойти к решению нашей фундаментальной задачи, включающей в себя дифференциальное уравнение, краевые и начальные условия:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right]=q(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial y(0,t)}{\partial x}=-\alpha y(0,t); \tag{2}$$

$$\frac{\partial y(l,t)}{\partial x}=-\beta y(l,t); \tag{3}$$

$$y(x,0)=f(x); \tag{4}$$

$$\frac{\partial y(x,0)}{\partial t}=F(x). \tag{5}$$

При этом мы не рассматриваем трения, выделения теплоты. Кроме того, мы исследуем собственные колебания, т. е. предполагаем, что нет внешних сил (мы видели, что введение внешних сил сводится к добавлению члена вида $f(x, t)$ в левой части дифференциального уравнения).

Рассматриваемая задача интересна и потому, что близка к тем, которые приходится решать в волновой механике.

Возьмем такую модель: струна прикреплена к упругой мембране, не имеющей массы (рис. 153). На струну действует тогда

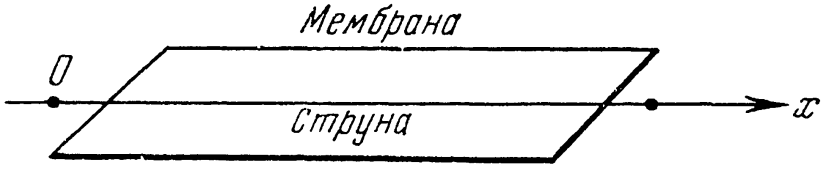


Рис. 153.

сила, пропорциональная ее отклонению y, т. е. квазиупругая сила. Уравнение колебаний струны будет

$$-\sigma(x)y+\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial y}{\partial x}\right)=q\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \tag{6}$$

где $\sigma(x)$ — коэффициент упругости мембраны.

Уравнение Шрёдингера примыкает к уравнению (6) теснее, чем к уравнению (1). Мы не будем рассматривать уравнения типа (6), так как не стоит утяжелять наши рассуждения, но большинство наших выводов будет применимо и к уравнениям вида (6).

Пусть мы имеем не совсем прямолинейный стержень. Если кривизна мала, т. е. $d/R \ll 1$, где d — толщина стержня, R — радиус кривизны, и если x — расстояние по оси стержня, то наши рассуждения остаются в силе, уравнение будет таким же, как и для прямолинейного стержня.

Предположим теперь, что стержень сомкнулся в кольцо (рис. 154). Электрический аналог этого случая — лехеровы провода, образующие два параллельных кольца, одно над другим (провода замкнуты). Каковы в этом случае краевые условия?

Здесь $x=0$ и $x=l$ — это одна и та же точка. Естественно поэтому требовать, чтобы y и $\partial y/\partial x$ были одинаковы для $x=0$ и для $x=l$. Таким образом, в этом случае мы имеем существенно

иные краевые условия, выражающие требование периодичности y и $\partial y/\partial x$ по x с периодом l:

$$y(0, t) = y(l, t); \tag{7}$$

$$\frac{\partial y(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial y(l, t)}{\partial x}. \tag{8}$$

Теорему об однозначности решения можно и в этом случае доказать точно так же, как для прежних граничных условий (2) и (3). Но характер движения при условиях (7) и (8) существенно другой.

Вернемся к уравнению (1). В прошлый раз мы писали:

$$y(x, t) = \varphi(x)\,\psi(t). \tag{9}$$

При этом переменные разделяются, и мы получаем два уравнения в полных производных. Метод разделения переменных — один из самых мощных способов решения уравнений в частных производных.

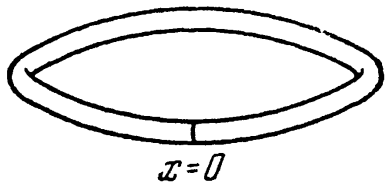


Рис. 154.

Уравнения в полных производных, получающиеся после разделения переменных, таковы:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\lambda\psi; \tag{10}$$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi}{dx}\right] = -\lambda q(x)\varphi \tag{11}$$

(λ — постоянная, положительная или отрицательная — это пока безразлично), причем

$$\frac{d\varphi(0)}{dx} = \alpha\varphi(0), \quad \frac{d\varphi(l)}{dx} = -\beta\varphi(l). \tag{12}$$

Если проделать то же самое для более общего случая (6), то получится вместо (11) уравнение

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi}{dx}\right] - \sigma(x)\varphi = -\lambda q(x)\varphi. \tag{13}$$

Уравнение (10) сразу решается. В нем λ должно быть таким, чтобы система (11), (12) удовлетворялась. Те значения параметра λ, для которых система (11), (12) имеет решение, отличное от нуля,

называются характеристическими числами (или собственными значениями). Для них существенно то дополнительное условие, что

$$\alpha \geqslant 0, \ \beta \geqslant 0,$$

$$p(x) > 0, \ q(x) > 0,$$

а в случае уравнения (13) еще и $\sigma \geqslant 0$.

Уравнения (11) с краевыми условиями (12) составляют проблему Штурма — Лиувилля. Аналогичная проблема имеет место и в теории теплопроводности, где особенно важны случаи $\sigma \neq 0$. Наши интересы в основном относятся к случаю $\sigma = 0$. Поскольку речь идет о частных решениях, можно не говорить о начальных условиях.

Дифференциальное уравнение для φ можно записать иначе. Выражение, стоящее в левой части, получается в результате того, что мы производим над функцией φ некоторую линейную операцию. Мы можем написать его в виде $L(\varphi)$, где L — некоторый оператор:

$$L(\varphi) = -\lambda q\varphi.$$

Можно далее отнести $q(x)$ в левую часть. Тогда уравнение (11) напишется так:

$$L(\varphi) = -\lambda\varphi,$$

причем оператор L — *линейный*, т. е.

$$L(\varphi_1 + \varphi_2) = L(\varphi_1) + L(\varphi_2).$$

Задача о нахождении чисел λ часто формулируется так: нужно найти *собственные значения оператора* L. Все задачи волновой механики сводятся к определению собственных чисел и собственных функций тех или иных линейных операторов.

Система линейных алгебраических уравнений также может быть записана с помощью оператора. Пусть y — совокупность n чисел, A — оператор (ему соответствует некоторая матрица). Тогда

$$Ay = -\lambda y$$

есть задача о решении системы линейных уравнений с параметром λ. Такова задача о нахождении собственных частот дискретной системы.

Операторная интерпретация задач о собственных значениях получила в настоящее время чрезвычайно широкое распространение. Возникла новая отрасль математики — операторное исчисление.

Оно дает общие методы нахождения собственных значений и собственных функций. Мы рассматриваем очень частный случай такой задачи.

Продолжим наше исследование. Каков характер движения во времени?

Если $\lambda < 0$, то решения уравнения (10) будут вида $e^{\pm\sqrt{|\lambda|}t}$; если же $\lambda > 0$, то решения этих уравнений будут содержать косинус и синус. Таким образом, вопрос о том, каков *знак* характеристического числа задачи Штурма — Лиувилля, имеет существенное значение. Оказывается, что эти характеристические числа всегда положительны, за исключением одного случая, когда одно из них равно нулю. В этом состоит *первая* основная теорема о собственных числах задачи Штурма — Лиувилля. Мы сегодня не будем ее доказывать.

Отбросим пока случай, когда имеется характеристическое число $\lambda = 0$, и примем, что все $\lambda > 0$. Уравнение (10) имеет для данного частного значения λ общее решение:

$$\psi = A\cos\omega t + B\sin\omega t,$$

причем

$$\omega^2 = \lambda.$$

Соответствующее движение будет

$$y = \varphi(x)(A\cos\omega t + B\sin\omega t).$$

Каждому значению λ отвечает частное решение такого вида — гармоническое колебание, частота которого равна квадратному корню из взятого характеристического значения рассматриваемой проблемы Штурма—Лиувилля; соответствующее ему $\varphi(x)$ дает *форму* колебания, т. е. распределение амплитуды по x. Все возможные решения соответствуют гармоническим колебаниям с определенным периодом и определенной формой.

В системе из дискретных масс было возможно некоторое конечное число N гармонических колебаний с соответствующими амплитудами, меняющимися от точки к точке[1]. Здесь, как утверждает вторая теорема о собственных значениях задачи Штурма — Лиувилля, имеется *бесконечное множество* характеристических чисел: наша система способна колебаться с *бесконечным* набором возможных частот (существенное отличие от дискретной системы),

[1] [См. 30-ю лекцию части I.]

которые образуют не континуум, а счетное множество. Это множество не имеет точек сгущения в конечном интервале: с ростом номера частота неограниченно растет. Можно задать номер частоты так, что она будет как угодно велика.

Эту вторую теорему мы тоже не будем сегодня доказывать[1]. Заметим пока только следующее. Математическая теория строится так: сначала ставится вопрос о том, существуют ли характеристические числа, и доказывается, что всегда существует хотя бы одно, а затем уже из этого выводится, что их существует бесчисленное множество.

Пусть мы нашли все λ_i и все $\varphi_i(x)$, т. е. нашли $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ и $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots$ Эти решения удовлетворяют дифференциальному уравнению и граничным условиям. Но чтобы решить поставленную задачу, нужно удовлетворить еще начальным условиям (4) и (5). Можем ли мы быть уверены, что всегда удастся припасовать решение так, чтобы при $t=0$ y обращалось в $f(x)$, а $\partial y/\partial t$ в $F(x)$?

В случае дискретных систем вопрос ставится совершенно так же. Мы имели частные решения вида

$$y^{(k)} = a^{(k)} \cos \omega_i t, \qquad y_i^{(k)} = a^{(k)} \sin \omega_i t.$$

Общее решение для k-той координаты было

$$y^{(k} = \sum_i a_i^{(k)} (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t) \tag{14}$$

и требовалось, чтобы при $t=0$ $y^{(k)}$ и $\partial y^{(k)}/\partial t$ принимали для каждого k заданные значения. Эти начальные условия давали для A_i и для B_i по N линейных уравнений. Задача припасования ряда (14) к начальным условиям сводилась к решению этих систем линейных уравнений. Детерминант системы отличен от нуля, поэтому такая система допускает одно и только одно решение.

В случае распределенной системы имеются частные решения вида

$$\varphi_i(x) \cos \omega_i t, \qquad \varphi_i(x) \sin \omega_i t.$$

В силу линейности частным решением является также

$$y_i(x, t) = \varphi_i(x)(A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t),$$

---

[1] [Доказательства обеих теорем о собственных числах см. в 9-й и в 10-й лекциях части II.]

где A_i и B_i — постоянные. Если мы сложим ряд таких решений, то мы также получим решение. Это очевидно в случае *конечного* числа слагаемых. Предположим (пока что без обоснования), что это верно и для бесконечного числа слагаемых (мы действуем по аналогии). Итак, предположим, что мы имеем решение

$$y(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(x)(A_i\cos\omega_i t+B_i\sin\omega_i t). \tag{15}$$

Если мы сможем подобрать A_i так, что

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}A_i\varphi_i(x), \tag{16}$$

то этим мы удовлетворим первому начальному условию, а если мы сможем подобрать B_i так, что

$$F(x)=\sum_{i=1}^{\infty}B_i\omega_i\varphi_i(x), \tag{17}$$

то мы удовлетворим и второму начальному условию.

Таким образом, вопрос о возможности удовлетворить основным уравнениям и начальным условиям сводится к вопросу о том, можно ли представить заданную функцию в виде бесконечного ряда, состоящего из постоянных, умноженных на собственные функции нашей краевой задачи. Может ли любая функция от x быть разложена в ряд по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля?

В дискретных системах аналогичный вопрос был тривиальным, он сводился к решению системы линейных уравнений. Теперь же мы имеем дело не с конечными совокупностями величин, а с функцией. При этом появляются бесконечности двоякого рода: бесконечное число значений x и бесконечное число членов ряда. Поэтому поставленный вопрос является трудным. Мы еще вернемся к нему, а пока заметим, что в частном случае, когда мы можем написать функции $\varphi_i(x)$ *явно*, а именно в частном случае однородного стержня (или однородной струны), закрепленного на концах,

$$\varphi_i(x)=\sin\frac{i\pi x}{l}.$$

Таким образом, вопрос о возможности разложения по собственным функциям сводится здесь к следующему: можно ли разложить произвольную функцию, удовлетворяющую граничным усло-

виям, в ряд Фурье по синусам? Мы видим, что ряд Фурье — очень частный случай ряда по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля. То, что он сыграл такую исключительную роль, связано с физической проблемой однородной струны.

Вернемся к общему случаю. Возьмем две фундаментальные функции $\varphi_i(x)$ и $\varphi_k(x)$, относящиеся к двум различным характеристическим числам λ_i и λ_k. Оказывается, что для них имеет место замечательное равенство:

$$\int_0^l q(x)\varphi_i(x)\varphi_k(x)\,dx = 0 \quad (i \neq k). \tag{18}$$

Если две функции удовлетворяют такому соотношению, то говорят, что они ортогональны по отношению к функции $q(x)$. В этом случае говорят об ортогональности *с весом*, в отличие от простой ортогональности:

$$\int_0^l \varphi_i(x)\varphi_k(x)\,dx = 0.$$

Для удобства часто вводят новую систему функций:

$$\psi_i(x) = \sqrt{q(x)}\,\varphi_i(x),$$

для которых имеет место простая ортогональность. Интеграл

$$\int_0^l q(x)\varphi_i^2(x)\,dx,$$

имеющий, как мы увидим, вполне определенный физический смысл, заведомо не равен нулю.

Заметим, что если фундаментальную функцию мы умножаем на постоянную, мы снова получаем фундаментальную функцию. Часто условливаются брать такой множитель, чтобы было

$$\int_0^l q(x)\varphi_i^2(x)\,dx = 1. \tag{19}$$

В этом случае говорят, что функция $\varphi_i(x)$ нормирована.

В результате (18) легко найти коэффициенты разложения функции $f(x)$ по функциям $\varphi_i(x)$ задачи Штурма—Лиувилля. Умножим обе части равенства (16) на $\varphi_i(x)q(x)$ и проинтегрируем от 0 до l. Слева получаем:

$$\int_0^l q(x)f(x)\varphi_i(x)\,dx.$$

Справа получится сумма, в которой ввиду свойства ортогональности (18) все интегралы равны нулю, за исключением того, который содержит $\varphi_i^2(x)$. Так как функции $\varphi_i(x)$ по предположению нормированы, то мы получаем:

$$A_i = \int_0 q(x) f(x) \varphi_i(x)\, dx. \tag{20}$$

Если известны все фундаментальные функции, то найти коэффициенты разложения не представляет трудностей. Таким образом, все как будто бы обстоит благополучно.

Но то, что мы сделали, абсолютно незаконно.

Справа в (16) стоит бесконечный ряд. Неизвестно, сходится ли он, а если сходится, то представляет ли он функцию $f(x)$. Нельзя легко относиться к таким вещам. Вот пример, на котором это хорошо видно.

Пусть в ряде (16) пропущена одна функция. Ряд остается бесконечным. Но теперь он не может представить любую функцию $f(x)$. В самом деле, пусть $f(x)$ есть как раз забытая функция из числа $\varphi_i(x)$. Тогда заведомо нельзя ее изобразить с помощью оставшегося ряда, так как он ортогонален к пропущенной функции.

В случае системы с конечным числом степеней свободы ясно, что посредством $N-1$ постоянных нельзя удовлетворить N начальным условиям. Теперь у нас бесконечное число постоянных и бесконечное множество начальных значений, и не сразу ясно, можно ли им удовлетворить, выкинув одну постоянную: $\infty - 1 = \infty$. Мы видим, что переход к бесконечному числу постоянных ведет к новым постановкам задачи.

Как возникли эти вопросы?

Первый, кто указал на возможность разложения по собственным функциям, был Бернулли. Он решил проблему струны именно таким способом. Он сказал: „Возможность разложения следует из того, что движение должно удовлетворять начальным условиям“. Это было принято в штыки, так как в то время придерживались определения функции, данного Эйлером. Эйлер различал два класса функций:

1. Те, которые изображаются с помощью известных нам аналитических выражений.

2. Те, которые изображаются кривыми, „как-нибудь свободной рукой проведенными“ (libera manu ducta).

По Бернулли же выходит, что такая форма струны, как на рис. 155, с одной стороны, может быть изображена с помощью тригонометрических функций (1-й класс функций по Эйлеру), а с другой стороны — это функция 2-го класса. На этом основании считали, что ее нельзя представить в виде *одной* функции 1-го класса (одного аналитического выражения).

Трудность может быть сформулирована так. Значение ряда (16) задается дискретным рядом величин (коэффициентов разложения), а нужно с их помощью представить функции $f(x)$ для континуума значений x. Множество коэффициентов счетное, а множество непрерывных функций, так кажется, „гораздо больше".

Теперь известно, в чем дело.

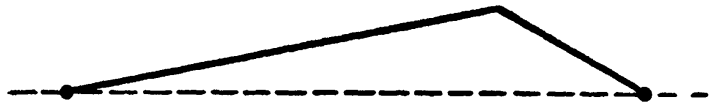


Рис. 155.

Современное определение функции таково: y есть функция от x, если каждому определенному x соответствует определенное y. Если о функции известно только это, то действительно ее нельзя разложить, вообще говоря, в ряд со счетным множеством чисел. Но оказывается, что множество *непрерывных* функций — тоже счетное; оно меньше по своей мощности, чем континуум. Дело в том, что непрерывную функцию достаточно определить в рациональных точках, тем самым она определена во *всех* точках. Рациональные же точки образуют счетное множество. Поэтому и оказывается, что мощность множества непрерывных функций не больше, чем мощность множества коэффициентов нашего ряда.

Первое строгое обоснование разложения в ряд Фурье было дано Дирихле. Даже теперь неизвестны необходимые условия разложения в ряд Фурье. Но известны достаточные условия, и нас, физиков, они удовлетворяют.

Перейдем к другому вопросу.

Что значит: ряд (16) сходится? Это значит, что функцию $f(x)$ можно точно представить рядом. С одной стороны, это для нас слишком много, с другой — это нам ничего не дает. Пусть известно, что ряд сходится. Отсюда еще нельзя ничего заключить о том, что дает конечное число членов. Физику вопрос о сходимости не интересует. Ее интересует другой вопрос: можно ли быть уверен-

ным, что с помощью *конечного* числа членов удастся с достаточной точностью представить заданную функцию?

Доказательства, обосновывающие оба утверждения, тесно сплетаются, но принципиально — это разные утверждения. Нужно ясно их разграничивать. Если ряд сходится, то этого еще недостаточно, чтобы обосновать те действия, посредством которых мы получаем формулу (20). Не всякий сходящийся ряд можно интегрировать почленно. Ряд

$$\left(x - xe^{-x^2}\right) + \left(xe^{-x^2} - 2xe^{-2x^2}\right) + \ldots \tag{21}$$

сходится для каждого x. Сумму S_n первых n его членов можно представить в виде

$$S_n = x - nxe^{-nx^2}.$$

При $n \to \infty$ второй член стремится к нулю и сумма стремится к x.

Проинтегрируем ряд в интервале от 0 до 1. Взяв сначала сумму, а потом проинтегрировав, мы получим:

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}. \tag{22}$$

Будем теперь интегрировать почленно, а затем суммировать. Мы получим, просуммировав, интегралы от n первых членов:

$$\int_0^1 \left(x - nxe^{-nx^2}\right) dx = \frac{e^{-n}}{2}.$$

При $n \to \infty$ это выражение стремится к нулю, т. е. к пределу, отличному от (22). Этот пример показывает, что речь идет не о пустых придирках.

Для того, чтобы сходящийся ряд можно было интегрировать почленно, достаточно, чтобы ряд сходился *равномерно*. Это означает следующее.

Рассмотрим ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

Пусть

$$R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$$

Если ряд сходится, то при фиксированных x для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое N, что $|R_n| < \varepsilon$ при $n > N$.

Но возможны два случая.

1. Значение N зависит от x. Может случиться, что по мере подхода к определенному значению x число N неограниченно растет.

2. Значение N может быть выбрано независимо от x. Во втором случае говорят, что ряд сходится равномерно.

Ряд (21) сходится для всех x, но сходится неравномерно.

В интересующем нас вопросе имеется следующая основная теорема (мы не будем ее доказывать): если $f(x)$ непрерывна, а $f'(x)$ и $f''(x)$ кусочно-непрерывны (т. е. имеются конечные куски, где эти производные непрерывны, и число таких кусков конечно), и если $f(x)$ удовлетворяет граничным условиям некоторой задачи Штурма — Лиувилля, то $f(x)$ может быть разложена в *равномерно сходящийся ряд* по собственным функциям этой задачи Штурма — Лиувилля. Эта теорема указывает достаточные условия разложимости. Более широких условий физика и не требует.

Если бы для того, чтобы представить с хорошим приближением данную функцию, нужно было принимать во внимание очень высокие члены разложения, то наши результаты не имели бы большого физического интереса, так как на основании молекулярных соображений мы знаем, что число отдельных колебаний конечно. К счастью, это не так.

Мы займемся далее конкретизацией высказанных в этой лекции результатов на определенных физических задачах, а затем вернемся к общим вопросам.

ШЕСТАЯ ЛЕКЦИЯ

(19/XII 1931 г.)

Задача об однородном стержне с закрепленными концами. Частоты и формы колебаний. Свойства, типичные и нетипичные для общего случая задачи Штурма—Лиувилля. Случай свободных концов. Случай, когда один конец свободен, а другой — закреплен. Случай электрической линии, нагруженной конденсатором. Случай электрической линии, нагруженной катушкой самоиндукции.

Вернемся к задаче Штурма—Лиувилля, сформулированной в прошлой лекции. Возьмем самый простой, всем известный пример. Этот пример практически чрезвычайно важен. Кроме того, в нем многие черты характерны для самой общей проблемы Штурма—Лиувилля.

Пусть $p(x)$ и $q(x)$ постоянны. Обозначим

$$\frac{p}{q}=a^2$$

и будем искать частные решения вида

$$y=\varphi(x)\psi(t). \tag{1}$$

Для $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ получаем уравнения:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{\lambda^2}{a^2}\varphi=0; \tag{2}$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}+\lambda^2\psi=0. \tag{3}$$

Мы покажем, что собственные значения λ положительны. Тогда можно обозначить

$$\lambda=\omega^2,$$

где ω — действительная величина (частота), и из (3)

$$\psi=A\cos\omega t+B\sin\omega t. \tag{4}$$

Вся задача будет решена, если мы найдем ω.

Нам нужно найти не просто решение уравнения (2), а решение, удовлетворяющее краевым условиям. Возьмем для простоты краевые условия

$$\varphi(0)=0,\ \varphi(l)=0. \tag{5}$$

Заметим, что волновое уравнение

$$a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

получающееся при $p(x)=\text{const}$ и $q(x)=\text{const}$, симметрично относительно x и t (в общем случае уравнение для y несимметрично относительно x и t). Однако вся задача в целом и здесь *несимметрична* относительно x и t: по x мы имеем краевые условия, а по t — начальные условия.

Можно ли разумно поставить задачу так, чтобы по t были заданы краевые условия, а y и $\frac{\partial y}{\partial x}$ были для $x=0$ заданными функциями от t? Я не знаю интересных случаев, где задача ставилась бы таким образом. Если речь идет об отыскании решений,

периодических по времени, то и здесь по отношению к x мы не интересуемся тем, что происходит при $x<0$ и $x>l$.

Для случая постоянных p и q краевая задача решается очень легко. Мы сразу получаем из уравнения (2):

$$\varphi = C_1 \cos\frac{\omega x}{a} + C_2 \sin\frac{\omega x}{a}, \tag{6}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Нам нужно, чтобы (6) удовлетворяло условиям (5). Пусть $x=0$. Тогда из (6) получаем $\varphi(0)=C_1$, и, следовательно, в силу (5)

$$C_1 = 0. \tag{7}$$

Пусть $x=l$. Принимая во внимание (7), получаем из (5) и (6):

$$\sin\frac{\omega l}{a} = 0,$$

откуда

$$\frac{\omega l}{a} = s\pi \quad (s=1,2,3,\ldots). \tag{8}$$

Здесь как раз заключен решающий момент. *Возможно* удовлетворить нашим граничным условиям, но не при всяких ω, т. е. не при всяких λ, а только при каких-то определенных.

Мы пришли к трансцендентному уравнению для ω, имеющему бесконечное множество действительных и положительных корней. Каждому значению характеристического числа λ (или ω) соответствует *одна* (с точностью до постоянного множителя) функция $\varphi(x)$, т. е. одна вполне определенная *форма* колебания. Все эти свойства типичны. При краевых условиях рассматриваемого типа они имеют место не только при постоянных p и q (при периодических краевых условиях дело обстоит иначе).

Решениями являются гармонические колебания (4), частоты которых образуют согласно (8) бесконечную дискретную последовательность. Она не имеет сгущения в конечной области, а растет в бесконечность. И эти свойства тоже типичны для задачи Штурма—Лиувилля. Но не типично то, что частоты (8) образуют *гармонический* ряд, т. е. относятся между собой, как целые числа. Обертоны *неоднородной* системы *не* относятся друг к другу, как целые числа.

Перейдем к форме колебаний. При $s=1$ в интервале $(0,l)$ укладывается полволны (рис. 156):

$$\Lambda_1 = 2l;$$

при $s=2$ — целая волна, при $s=3$ — полторы волны и т. д. Вообще

$$\Lambda_s=\frac{2l}{s}.$$

То, что пространственная форма колебания синусоидальна, — это *не* типично. Но типично для всех задач Штурма—Лиувилля то, что при переходе от s к $s+1$ число нулей функции $\varphi(x)$ внутри интервала $(0, l)$ возрастает на единицу. При s-ом колебании в интервале $(0, l)$ функция $\varphi(x)$ имеет в одних случаях s нулевых точек, в других случаях $s-1$ (например, в только что рассмотренном).

Антенна, колеблющаяся на каком-нибудь обертоне, разбивается на ряд участков, колеблющихся в противоположных фазах. Если

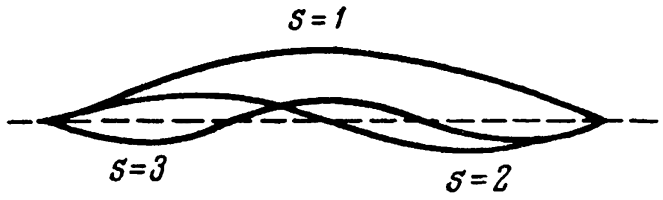


Рис. 156.

антенна колеблется в основном тоне, она дает максимум излучения в одних направлениях; если она колеблется в другом тоне, то она дает максимум излучения в других направлениях.

Можно сказать, что все точки колеблются в одной и той же фазе, но амплитуды соседних участков имеют противоположные знаки. Это свойство также типично.

Нулевые точки называются узлами, точки максимума амплитуды — пучностями. Точки, являющиеся узлами для одной функции, могут быть пучностями для другой (что иногда вызывает недоразумения). В самом деле, можно интересоваться разными вещами, например:

1) Насколько частицы отклоняются. Функция $\varphi(x)$ как раз и описывает отклонения частиц.

2) Какова в различных местах деформация $\frac{\partial y}{\partial x}$, т. е. насколько различные точки удалились друг от друга. Если $\frac{\partial y}{\partial x}=0$, то соседние точки одинаково удалены от положения равновесия; если $\frac{\partial y}{\partial x}<0$, то имеет место сжатие, если $\frac{\partial y}{\partial x}>0$ — растяжение.

Узлам смещения y соответствуют в случае (6) пучности сжатия и механического напряжения, и наоборот. То, что узлы

смещения и деформации не совпадают, и то, что пучности смещения совпадают с узлами деформации,— типично для общей проблемы, но то, что пучности деформации совпадают с узлами смещения,— не типично.

В стержне узлы смещения являются для материала самыми опасными (в смысле напряжения) местами.

В электрическом однородном случае, там, где ток имеет узел, напряжение, имеется пучность, и наоборот.

Итак, говорить просто об узлах или пучностях нельзя, каждый раз нужно указывать, какая величина имеется в виду.

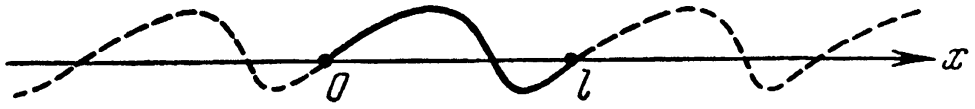


Рис. 157.

В случае однородного стержня с закрепленными концами разложение начального смещения по собственным функциям имеет вид

$$f(x) = \sum_s A_s \sin \frac{s\pi x}{l}. \tag{9}$$

Это — обычный ряд Фурье по синусам. Постановка задачи здесь несколько другая, чем при разложении в ряд Фурье периодической функции.

Известно, что всякую периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье. Здесь же речь идет о разложении функции в интервале от $x=0$ до $x=l$. Если x будет расти за пределами интервала $(0, l)$, то функция, представляемая рядом Фурье (9), будет повторяться периодически (рис. 157), но здесь это для нас не интересно.

Несколько слов относительно случая открытых концов. Форма колебаний (для y) в этом случае показана на рис. 158. Здесь число узловых точек для обертона данного номера на единицу больше, чем в случае закрепленных концов.

Между обоими случаями имеется и математически и физически довольно существенная разница. Для закрепленных концов $\lambda=0$ не является собственным значением. При $\lambda=0$ уравнение (2) имеет общее решение

$$\varphi(x) = C_1 x + C_2, \tag{10}$$

в котором нельзя подобрать C_1 и C_2 так, чтобы удовлетворить граничным условиям (5). Подставляя (10) в граничные условия для открытых концов:

$$\varphi'(0)=0,\ \varphi'(l)=0, \tag{11}$$

получаем:

$$C_1=0,\ \varphi=C_2,$$

т. е. граничным условиям удовлетворяет постоянная величина. Таким образом, в случае специальных краевых условий (11) $\lambda=0$

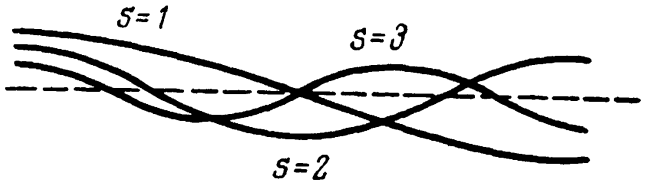


Рис. 158.

является собственным значением. Физически это совершенно очевидно: существует решение, при котором стержень движется как целое. Оно соответствует случаю, когда все точки стержня имеют одинаковую начальную скорость. Начальными условиями можно „подавить“ это решение, сделать так, чтобы оно выпало. Для этого нужно, чтобы стержень как целое не имел начальной скорости.



Рис. 159.

Граничные условия (11) имеют место также в задаче о колебаниях свободно падающего стержня.

Несколько более интересен тот случай, когда стержень закреплен на одном конце и свободен на другом.

При его рассмотрении мы воспользуемся тем, что дифференциальное уравнение для всех случаев одно и то же. Здесь формы колебаний изображаются кусками синусоид, такими, что на одном конце равно нулю смещение, а на другом — его производная. Возможно, например (рис. 159), колебание в четверть волны, период которого вдвое больше, чем если бы оба конца были закреплены или оба свободны. Частоты колебаний здесь будут относиться, как 1:3:5:7 и т. д.

Этот случай прямо сводится к тому, когда оба конца закреплены, но стержень имеет удвоенную длину и находится в таком начальном состоянии, что не возбуждаются четные обертоны. Если мы разрежем стержень посередине, то каждая его половина будет продолжать колебаться так же, как и вначале.

Такой способ получать из известной системы новые — довольно красивый и далеко идущий.

Интересен случай кольца, когда граничные условия:

$$\varphi(0)=\varphi(l), \tag{12}$$

$$\varphi'(0)=\varphi'(l) \tag{13}$$

выражают периодичность решения. Из (6) и граничных условий (12) и (13) следует, что

$$\frac{\omega l}{a}=2s\pi.$$

При этом обе функции $\cos\frac{\omega x}{a}$ и $\sin\frac{\omega x}{a}$ в отдельности удовлетворяют граничным условиям, и, следовательно, эти условия удовлетворены при любых C_1 и C_2. Частоты будут вдвое больше (для данного номера обертона), чем тогда, когда стержень разрезан. Каждой частоте соответствует бесконечное множество различных распределений колебаний. Все они изображаются линейными комбинациями (6) линейно независимых функций $\cos\frac{\omega x}{a}$ и $\sin\frac{\omega x}{a}$.

Интерес подобных *вырожденных* случаев был понят только после того, как возникла волновая механика, где они часто встречаются.

Перейдем теперь к технически очень важному вопросу о нагруженной антенне — антенне, на концах которой имеется сосредоточенная емкость или индуктивность („нагрузка“). Рассмотрим случай, когда концы заземлены через конденсаторы. Здесь уравнения прохождения тока через конденсатор приводят для тока к граничному условию

$$\frac{d\varphi(l)}{dx}=-\frac{C}{C_0}\varphi(l), \tag{14}$$

где C — емкость единицы длины провода, C_0 — емкость конден-

сатора, и к аналогичному условию (с другим знаком) при $x=0$. Эти условия имеют, таким образом, вид:

$$\frac{d\varphi}{dx}=\alpha\varphi \qquad (x=0),$$

$$\frac{d\varphi}{dx}=-\beta\varphi \qquad (x=l),$$

где α и β — постоянные и положительные величины [1]. Получается один из случаев задачи Штурма—Лиувилля.

Пусть левый конец заземлен накоротко (рис. 160). Тогда $\alpha=0$. Поступая совершенно так же, как для стержня, мы видим, что

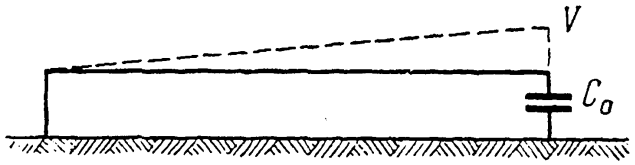


Рис. 160.

на основании граничных условий при $x=0$ нужно отбросить частное решение уравнения вида $\sin\frac{\omega x}{a}$. Таким образом, здесь

$$\varphi(x)=\cos\frac{\omega x}{a}. \tag{15}$$

Теперь нужно определить такие ω, при которых (15) удовлетворяют второму граничному условию. Подставляя (15) в граничное условие (14), получаем:

$$-\frac{\omega}{a}\sin\frac{\omega l}{a}=-\frac{C}{C_0}\cos\frac{\omega l}{a},$$

т. е. более сложное уравнение для ω, чем прежде. Займемся его исследованием.

Умножив обе части на l, мы получим трансцендентное уравнение

$$\frac{\omega l}{a}\sin\frac{\omega l}{a}=\frac{C'}{C_0}\cos\frac{\omega l}{a}, \tag{16}$$

где $C'=Cl$ — емкость всего провода, или иначе

$$\xi\operatorname{tg}\xi=b, \tag{17}$$

---

[1] [См. 4-ю лекцию части II.]

где

$$\xi = \frac{\omega l}{a}, \qquad b = \frac{C'}{C_0}.$$

Предположим сначала, что емкость конденсатора очень велика по сравнению с емкостью всего провода. Взяв достаточно малое значение b, можно в первом приближении заменить $\operatorname{tg}\xi$ через ξ, что приводит к уравнению

$$\frac{\omega^2 l^2}{a^2} = \frac{C'}{C_0}.$$

Вспомним, что

$$a^2 = \frac{c^2}{CL},$$

где c — скорость распространения в вакууме. Следовательно,

$$\omega^2 = \frac{c^2 C'}{CLC_0 l^2},$$

или

$$\omega^2 = \frac{c^2}{L'C_0},$$

где $L' = Ll$ — самоиндукция всего провода. Это не что иное, как формула Томсона.

Уравнение (16) для частоты имеет бесконечно много корней. Мы показали, что частоту основного колебания при достаточно малом значении отношения C'/C_0 можно вычислить по формуле Томсона. Мы пришли к обоснованию этой формулы для случая, когда емкость проводов мала по сравнению с емкостью конденсатора.

Очень часто отношение C'/C_0 мало, но желательно учесть его в первом порядке, т. е. провести вычисление со следующей степенью точности. Взяв *два* члена разложения $\operatorname{tg}\xi$ в ряд по степеням ξ, получаем:

$$\frac{\omega l}{a}\left(\frac{\omega l}{a} + \frac{\omega^3 l^3}{3a^3}\right) = \frac{C'}{C_0}.$$

Первый член в скобке — малая величина, второй — еще меньшая. Не обосновывая этот прием, подставим во второй член то значение ω, которое мы нашли из нулевого приближения. Мы получим тогда:

$$\frac{\omega^2 l^2}{a^2}\left(1 + \frac{C'}{3C_0}\right) = \frac{C'}{C_0},$$

откуда

$$\frac{\omega^2 l^2}{a^2} = \frac{C'}{C_0 + \frac{C'}{3}}. \tag{18}$$

Таким образом, в следующем приближении емкость проводов учитывается тем, что к емкости конденсатора прибавляется одна треть общей емкости проводов. Эту поправку часто приходится принимать во внимание на практике.

Почему в (18) входит не вся емкость проводов, а лишь некоторая ее часть? Напряжение распределено по проводам неравномерно (рис. 160), емкость провода „работает" не полностью и напряжение на проводе меньше, чем на конденсаторе. В выражение потенциальной энергии через напряжение на конденсаторе войдет поэтому только часть емкости провода:

$$U = (C_0 + \alpha C')\frac{V^2}{2}, \qquad \alpha < 1.$$

Рассмотрим теперь общую картину. Напишем:

$$\eta = \frac{C_0}{C'}\xi, \qquad \zeta = \operatorname{ctg}\xi.$$

Тогда трансцендентное уравнение (17) принимает вид

$$\eta = \xi.$$

Начертим графики функций η и ξ и рассмотрим их точки пересечения (рис. 161). Их абсциссы дадут искомые значения ξ. Если мы рассматриваем задачу при различных емкостях C_0, то луч, изображающий функцию $\eta(\xi)$, поворачивается. Все ветви кривой $\zeta(\xi)$ пересекаются лучом. Отсюда видно, что существует бесконечное множество собственных значений.

Пусть $C_0 = 0$. Тогда точки пересечения лежат на оси абсцисс, и в них

$$\frac{\omega l}{a} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2}, \ldots$$

Это как раз те значения ω, которые соответствуют, как мы уже знаем, одному заземленному и одному открытому концу.

По мере увеличения C_0 точки пересечения передвигаются влево. При C_0 очень большом мы получаем один корень вблизи $\xi = 0$. Это и есть тот корень, который мы нашли в первом приближении.

При $C_0 \to \infty$ наименьшая частота стремится к нулю, остальные частоты тоже уменьшаются, но стремятся к конечным пределам, определяемым из равенств

$$\frac{\omega l}{a} = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ldots,$$

т. е. к частотам антенны, заземленной на обоих концах.

Итак, при увеличении емкости все „тоны" понижаются. Основной тон становится как угодно низким. Однако обертоны остаются

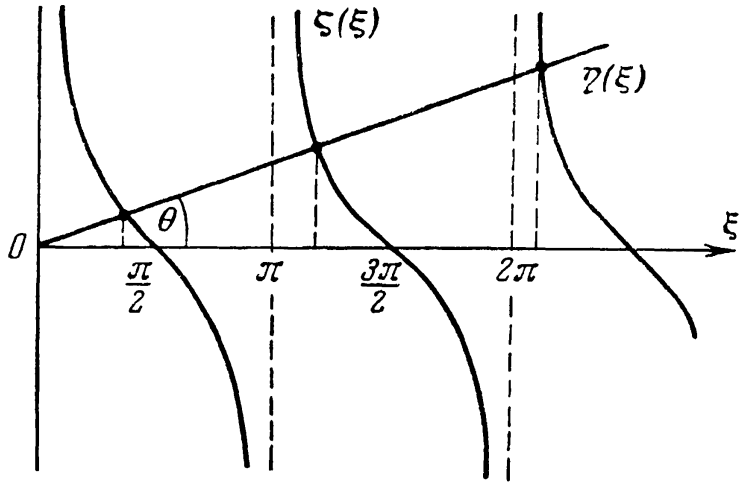


Рис. 161.

высокими. Этим объясняется, почему при больших C_0 можно пользоваться формулой Томсона: обертоны лежат очень далеко от основного тона; они быстро затухают и часто могут нас не интересовать.

Другой важный случай — провод с индуктивностью на конце (рис. 162). Если писать уравнение не для тока, как это делалось до сих пор, а для *напряжения*, то краевые условия здесь будут иметь вид:

$$\varphi(0) = 0, \qquad \frac{\partial \varphi(l)}{\partial x} = -\frac{L}{L_0}\varphi(l).$$

Получаются такие же граничные условия, как в задаче о *токе* в том случае, когда левый конец разомкнут, а правый замкнут на емкость.

Если левый конец разомкнут, а правый попрежнему замкнут на индуктивность (рис. 163), то задача о напряжении совпадает с задачей о токе в том случае, когда левый конец замкнут накоротко, а правый замкнут на емкость (рис. 160). Здесь, если L_0 очень велика, мы также получим приближенно для наинизшей частоты формулу Томсона.

Случай, когда на одном конце включена индуктивность, а на другом — емкость (рис. 164), несколько более сложны; под краевые условия задачи Штурма—Лиувилля они не подходят.

Для нагруженной системы частоты собственных колебаний не относятся друг к другу как целые числа. Общее решение есть сумма таких колебаний, т. е. сумма синусоидальных колебаний, периоды которых находятся в несоизмеримом соотношении. Таким образом, решение *не* есть



Рис. 162.



Рис. 163.



Рис. 164.

периодическая функция. Это функция почти-периодическая[1]. Из того, что нагруженная антенна имеет, вообще говоря, почти-периодические собственные колебания и что так же обстоит дело в общем случае неоднородной распределенной системы, видно, насколько велико значение почти-периодических функций.

СЕДЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(9/I 1932 г.)

Дополнительные замечания о граничных условиях. Однопроводная электрическая система. Понятие о решении Абрагама. Метод Даламбера. Начальные и граничные условия. Скорость фронта волны в неоднородной системе.

Вернемся к уравнению

$$a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{1}$$

и разберем вопрос, который поставил А. А. Андронов.

Пусть при $x = 0$ и при $x = l$ концы свободны:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

[1] [См. 5-ю лекцию части I.]

Тогда существует решение

$$y = \text{const}. \tag{3}$$

Оно означает, что весь стержень смещен на постоянную величину. Этому решению соответствует собственное значение $\lambda = 0$. Функция

$$y = at + b \tag{4}$$

(a и b — постоянные) также удовлетворяет дифференциальному уравнению и граничным условиям. Правда, мы не вправе рассматривать с помощью уравнения (1) большие отклонения, но формально (4) есть решение, и мы должны выяснить, что оно физически означает. Очевидно, в механическом случае оно означает, что свободный стержень движется с постоянной скоростью.

Перейдем к электрическому случаю. Напишем волновое уравнение для напряжения:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}. \tag{5}$$

Если концы разомкнуты, то на обоих концах ток $I = 0$, откуда следует, что и

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0. \tag{6}$$

Тогда существует решение

$$V = \text{const},$$

которое означает, что разность потенциалов между проводами постоянна (провода заряжены). Но уравнение (5) при граничных условиях (6) имеет также решение

$$V = at + b, \tag{7}$$

между тем такое нарастание потенциала при разомкнутых концах невозможно. Таким образом, это решение не имеет физического смысла. В чем здесь дело?

Уравнение для y в механическом случае получается непосредственно как уравнение движения. Уравнение для V в электрическом случае мы получаем путем исключения I из уравнений:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C\frac{\partial V}{\partial t}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{L}{c^2}\frac{\partial I}{\partial t}, \tag{8}$$

вытекающих из уравнений Максвелла. Для исключения I мы должны были продифференцировать уравнения (8). Сами уравнения (8) не допускают решения (7) для разомкнутых концов ($I=0$ на концах), т. е. не все решения уравнения (5) удовлетворяют уравнениям (8). Исключение I ввело новое решение, так как $\frac{\partial V}{\partial x}=0$ еще не означает, что $I=0$.

Вот аналогичный пример. Имеется уравнение $\frac{dx}{dt}=0$. Дифференцируя его, получаем уравнение $\frac{d^2x}{dt^2}=0$. Не всякое решение второго уравнения является решением первого.

Рассмотрим еще один вопрос, связанный с граничными условиями.

Производная $\partial y/\partial t$ характеризует изменение во времени величины y. Можно следить либо за данной материальной точкой, либо за данной точкой пространства. При этом $\partial y/\partial t$ будет иметь разный смысл, так как через данную точку пространства проходят различные материальные точки. Если движется стержень, плотность ρ которого в различных местах различна, то величина $\partial\rho/\partial t$ в данной материальной точке равна нулю, а в данной точке пространства отлична от нуля.

В законы Ньютона входят производные по времени для данной материальной точки. При малых колебаниях разности между ними и производными в данной точке пространства — второго порядка малости, и мы их отбрасываем.

В граничных условиях не совсем безразлично, что понимать под $\partial y/\partial x$: производную в данной точке пространства или в данной точке материи.

Возьмем стержень, свободный на концах. Здесь следует считать, что $\partial y/\partial x=0$ в тех точках стержня, которые в покоящемся состоянии находились при $x=0$ и $x=l$. В данном случае это наиболее рациональное толкование граничных условий. Но возьмем трубу с открытыми концами. Речь идет о колебаниях воздуха в этой неподвижной трубе. Здесь граничные условия $\partial y/\partial x=0$ нужно относить к концам неподвижной стенки трубы, к данным точкам *пространства*.

В литературе этот вопрос рассмотрен либо неясно, либо неправильно. Правда, из-за малости колебаний отличие между обеими производными обычно очень мало.

Для струны теория, аналогичная той, которая была изложена для стержня, показывает, что основная частота есть

$$\nu = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}, \tag{9}$$

где l — длина; ρ — плотность; T — натяжение. На формуле (9) основан один из способов создавать эталоны частоты колебаний, что, вообще говоря, не очень легко. Эталоном может служить монохорд.

Измерив частоту акустических волн в трубе с помощью монохорда, можно определить скорость звука. Однако мы наталкиваемся на целый ряд трудностей.

Прежде всего предположение о том, что все частицы каждого сечения трубы $x = \text{const}$ имеют одну и ту же скорость, не *оправдывается* вследствие трения. Но при широкой трубе, как показал Гельмгольц, соответствующей поправкой можно пренебречь.

Далее возникает вопрос: как осуществить те или иные граничные условия. Твердую стенку очень легко сделать. Но очень нелегко сделать ее неподвижной, такой, чтобы можно было применять граничное условие $y = 0$.

Граничное условие $\partial y/\partial x = 0$ здесь означает, что давление на конце трубы должно оставаться постоянным. Опыт показывает, что это требование выполнить трудно. Приходится делать ряд поправок. С поправками теория вполне удовлетворительна, но часто можно пользоваться уравнениями и без поправок.

Электрический случай существенно отличен от механического. В механическом случае весь процесс концентрируется в материале стержня, струны и т. д. В электрическом случае в процессе принимает участие окружающая среда, о чем мы уже говорили.

Бесконечные параллельные провода цилиндрического сечения поддаются вполне строгой обработке. Мы знаем, что здесь

$$a^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu};$$

ε и μ характеризуют свойства внешнего пространства.

Если взять два *конечных* провода, расстояние между которыми мало по сравнению с длиной проводов, то теория, развитая для бесконечных проводов, остается приближенно применимой. Но пусть имеется один вертикальный провод (идеальный проводник) над землей (рис. 165). В случае плоской бесконечной проводящей земли эта задача эквивалентна задаче об *одном* проводе

удвоенной длины. Такому проводу приписываются некоторые C и L — емкость и индуктивность на единицу длины. Как это оправдать? (В этом вопросе нет никакого педантизма. Я не стараюсь нарочно искать какие-то трудности.)

Возьмем кабель, т. е. два концентрических цилиндра (рис. 166), и будем увеличивать радиус внешнего цилиндра b. При этом C и L будут изменяться, но произведение CL остается постоянным. Если бы провод был бесконечно длинным, то мы получили бы в пределе $L=\infty$, $C=0$. Если провод конечный, то в пределе этого не будет. Обычно считают, что волновое уравнение остается

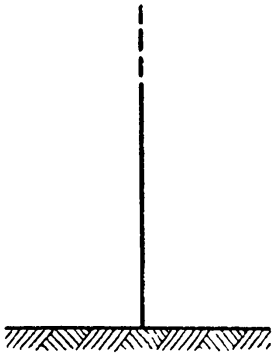


Рис. 165.

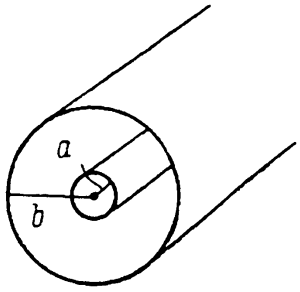


Рис. 166.

правильным и в этом случае. Говорят: есть все основания думать, что это уравнение применимо и для одного провода.

Я бы этого не сказал. Совесть беспроволочника не может на этом успокоиться.

Применяя здесь волновое уравнение, мы найдем формы колебания и т. д., но ведь этого недостаточно. Нужно знать еще, как ведет себя антенна при различных *граничных условиях*. Большое разнообразие задач возникает именно тогда, когда мы включаем в провод катушки, емкости и т. д. При решении таких задач приходится вводить отношение C/C_0 (C_0 — емкость на конце провода). В то время как в само волновое уравнение L и C порознь не входят (а входит только произведение LC, которое не зависит от данной системы), для решения краевых задач нужно знать L и C *в отдельности*.

Для емкости и индуктивности на единицу длины кабеля мы имеем выражения:

$$C=\frac{\varepsilon}{2\ln\frac{b}{a}} \qquad L=2\mu\ln\frac{b}{a}$$

Из произведения LC выражение $\ln\frac{b}{a}$ выпадает. Но если $b \to \infty$, то какие здесь следует брать емкость и индуктивность? У нас пока нет ни малейших указаний на то, как здесь поступить.

Что же здесь делать?

Дается следующий способ: вместо a нужно в первом приближении подставить выражение γl, где l — длина провода, а γ — поправочный коэффициент. Это угадано довольно давно. Постараемся понять, чем здесь руководствовались.

В выражения для емкости и индуктивности входит логарифм. Величина $\ln\frac{b}{\gamma l}$, вследствие нечувствительности логарифма, не ведет к большим недоразумениям даже при $\gamma = 1$, хотя формула с $\gamma = 1$ и неправильна. Таким образом, можно было подобными грубыми подстановками добиться довольно правильных результатов.

Первый и решительный шаг в направлении строгого решения задачи сделал Абрагам. Он поставил вопрос так: дан вытянутый эллипсоид из идеального проводника; требуется рассмотреть поле на основе уравнений Максвелла. Оказалось, что решение задачи дает в первом приближении те самые колебания, которые находили, принимая приближенно синусоидальные распределения тока. Во втором приближении получается затухание вследствие излучения, которое мы не рассматривали. Таким образом, с помощью решения Абрагама было полностью выяснено, как ведет себя антенна сама по себе. Эта задача решена Абрагамом как самостоятельная задача.

Однако интересующий нас вопрос — оправдание применения уравнений системы параллельных проводов к антенне — Абрагамом не решен. Оправдать это применение, я думаю, можно. Есть целый ряд подходов к вопросу. Если бы, например, я умел рассчитать один достаточно длинный провод, то это дало бы хорошее приближение.

Зоммерфельд вычислил поле такого провода при наличии сопротивления[1]. Если учитывать сопротивление, то можно решить задачу для одного бесконечно длинного провода. Оказывается, что здесь, хотя и с затруднением, но сделать это можно.

---

[1] [Ф. Франк и Р. Мизес. Дифференциальные уравнения математической физики, стр. 925 и след. М.—Л., 1937.]

В случае провода с аксиальной симметрией составляющая магнитного поля **H** по направлению провода равна нулю. В плоскости, перпендикулярной к оси симметрии (оси x),

$$\frac{\partial Ey}{\partial z}-\frac{\partial Ez}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial Hy}{\partial y}+\frac{\partial Hz}{\partial z}=0.$$

Это позволяет ввести нечто вроде потенциала в плоскости, перпендикулярной оси провода. В этой плоскости интеграл от **E** не зависит от пути, что позволяет говорить о некоторой „емкости". Хотя она обладает другими свойствами, чем обычная емкость, мы можем действительно оправдать наши дифференциальные уравнения в применении к одному проводу.

Итак, положение таково.

Обычные представления для одиночного провода неправильны. Понятия индуктивности и емкости на единицу длины здесь не имеют места, но для прямолинейного провода (антенны) можно ввести некоторые условные значения таких параметров и с ними написать обычные уравнения двухпроводной линии. Пока все это сделано „на пальцах", но этим вопросом стоило бы заняться. Его исследование не проведено до сих пор, и я счел нужным сказать об этом несколько слов.

Вернемся к задаче о собственных колебаниях распределенной системы. Здесь имеется далеко идущая аналогия с дискретной системой. Отличие распределенной системы в том, что у нее число собственных колебаний бесконечно велико.

Пусть при $t=0$

$$y=f(x), \quad \frac{\partial y}{\partial x}=F(x). \tag{10}$$

В общем решении для однородной системы

$$y=\sum_s \sin\frac{s\pi x}{l}\,(A_s\cos\omega_s t+B_s\sin\omega_s t) \tag{11}$$

можно подобрать A_s и B_s (если принять, что разложение возможно), чтобы удовлетворить начальным условиям (10). Мы доказали теорему о том, что удовлетворяющее начальным условиям решение (11) — единственное.

Заметим, что

$$\frac{l\omega_s}{\pi}=a,$$

где a есть скорость распространения. Но понятия о скорости, как о *таковой*, здесь нет.

Вообще говоря, возбуждаются *все* собственные колебания, но „случайно" некоторые из них могут отсутствовать. Если требуется, чтобы было только одно собственное колебание (одно ω_s), нужно возбудить систему специальным образом.

В рассматриваемом здесь случае сложение гармонических колебаний дает периодическое колебание.

Существует совсем другой способ решения той же задачи.

При этом способе рассматривают не тот объект, который нам задан, а совсем другой: *неограниченную* струну (или стержень). Исходя из исследования бесконечной струны, тоже можно придти к решению интересующих нас вопросов.

Уравнение (1) справедливо и для неограниченной струны. Самое общее его решение имеет вид

$$y = f_1(x - at) + f_2(x + at),$$

где $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ — функции, удовлетворяющие известным условиям непрерывности. Легко показать, что каждая из этих функций удовлетворяет дифференциальному уравнению (1); в самом деле,

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = f_1'', \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = f_1'' \cdot a^2,$$

и аналогично для f_2.

Выясним смысл решения $f_1(x - at)$. В момент $t = 0$ имеем:

$$y = f_1(x).$$

То значение y, которое было в момент $t = 0$ в точке x, будет через время t в новой точке $x + at$. Таким образом, возмущение перемещается без изменения формы; все возмущение, как „жесткое", распространяется со скоростью a. Такой процесс возможен только в однородной системе (стержне, струне).

Только потому, что возмущение распространяется, *не меняя формы*, можно без дальнейших пояснений говорить о скорости распространения возмущения. Если бы оказалось, что возмущение придет в другое место, имея другую форму, то обычное понятие скорости потеряло бы для него смысл. Для этого случая понятие скорости надо было бы заново определить, так как нельзя идентифицировать точки возмущения разной формы. Разумеется, скорость движения отдельной материальной точки стержня и скорость распространения импульса ничего общего между собой не имеют.

Совершенно таким же образом $f_2(x+at)$ изображает распространение импульса в противоположную сторону. Общее решение волнового уравнения изображает распространение двух импульсов во встречных направлениях. Их наложение дает все возможные движения.

Пусть даны начальные распределения (10) для смещений и скоростей. Уравнению (1) и этим начальным условиям удовлетворяет функция

$$y=\frac{1}{2}[f(x+at)+f(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(\xi)\,d\xi. \tag{12}$$

Действительно, интеграл есть разность функции от $x+at$ и той же функции от $x-at$. Следовательно, y есть сумма функции от $x+at$ и функции от $x-at$, а сумма такого вида удовлетворяет волновому уравнению.

Для $t=0$ интеграл равен нулю, и мы имеем:

$$y_{t=0}=f(x).$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{1}{2}[af'(x+at)-af'(x-at)]+\frac{1}{2}[F(x+at)+\frac{1}{2}F(x-at)]$$

при $t=0$ равняется $F(x)$. Следовательно, начальные условия также удовлетворены.

Мы написали для *бесконечной* струны решение (12), удовлетворяющее начальным условиям (10).

Раньше мы решали такую задачу: дана струна и граничные условия, которым надо было удовлетворить. Это достигалось выбором λ. Здесь мы поставили обратную задачу: найти решение, удовлетворяющее начальным условиям на всей струне. Можно ли припасовать это решение к граничным условиям? Оказывается, что можно. Это делается следующим образом.

Фактически начальные условия заданы только для интервала

$$0\leqslant x\leqslant l.$$

Но ничто нам не мешает *выдумать* начальные условия для всех остальных значений x.

Будем понимать под $f(x)$ и $F(x)$ функции, заданные в интервале $(0, l)$, но продолженные справа и слева так, что

$$f(-x)=-f(x),\quad f(x+2l)=f(x), \tag{13}$$

$$F(-x)=-F(x),\quad F(x+2l)=F(x). \tag{14}$$

Легко показать, что решение, удовлетворяющее искусственным начальным условиям (13) и (14), удовлетворяет также граничным условиям

$$y(0, t)=0, \quad y(l, t)=0.$$

Мы знаем, что существует единственное решение, удовлетворяющее граничным и начальным условиям. И действительно, можно показать, что решения, полученные обоими способами, тождественны.

Решение (12) толкуется очень просто. Возьмем наиболее простой случай, когда начальные скорости равны нулю. Тогда

$$y=\frac{1}{2}\left[f(x+at)+f(x-at)\right].$$

Это — движение двух волн, форма которых воспроизводит первоначальную конфигурацию (рис. 167). Сумма этих бегущих волн представляет собой стоячую волну. Точки 0 и l при этом остаются в покое. Таким образом, при этом способе рассмотрения мы получаем сразу форму струны и величина a приобретает здесь физический смысл скорости. Раньше она была названа скоростью чисто формально; здесь же это действительно скорость распространения импульса.

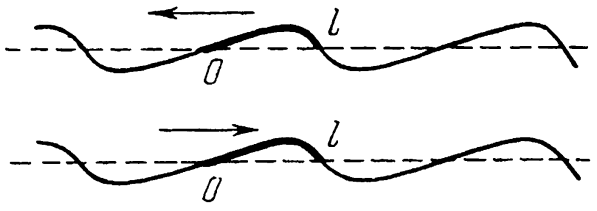


Рис. 167.

Обычно нас интересует, каковы частоты и амплитуды отдельных тонов. Для того, чтобы получить ответ на эти вопросы, необходимо вернуться к ряду Фурье — к первому способу рассмотрения задачи.

Мы оставим в стороне очень интересную задачу об отражении от закрепленного и от свободного конца. Вернемся к более общей задаче о неоднородной системе:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right]=q(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{15}$$

Ее разбор мы довели до задачи Штурма — Лиувилля. Можно ли здесь применить способ бегущих волн? Повидимому, нельзя, и метод разделения переменных — единственный.

В случае (15) форма импульса меняется при распространении, и поэтому нельзя говорить о его скорости. Но все же и здесь

можно ввести определенное понятие скорости. Фронт, начало импульса, распространяется с вполне определенной скоростью, правда зависящей от x. Скорость фронта есть

$$v=\sqrt{\frac{p(x)}{q(x)}}. \tag{16}$$

Это следует из одной теоремы о свойствах характеристик уравнений в частных производных второго порядка. В случае однородной системы формула (16) переходит в уже известную нам формулу для скорости распространения волн.

Пусть имеет место небольшое нарушение однородности: коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ медленно меняются с x. Тогда должно существовать какое-то приближенное понятие скорости распространения импульса. В противном случае теория однородных систем не могла бы применяться на опыте.

ВОСЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(13/I 1932 г.)

Положительность собственных значений задачи Штурма — Лиувилля. Каждому собственному значению соответствует одна собственная функция. Экстремальное свойство основного собственного значения. Его применение для приближенной оценки основной частоты. Свойства ортогональности собственных функций и их физический смысл.

Мы займемся теперь неоднородными распределенными системами. Мы увидим, что *качественные* характеристики неоднородных и однородных систем очень похожи. Для того, чтобы овладеть неоднородными системами, надо иметь возможность вычислять собственные числа и собственные функции. Прежде всего мы постараемся вывести некоторые общие положения.

Посредством подстановки

$$y=\varphi(x)\,\psi(t)$$

мы свели решение основной задачи к решению уравнений

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}+\lambda\psi=0$$

и

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi}{dx}\right)+\lambda q\varphi=0 \tag{1}$$

с граничными условиями

$$(\varphi'-\alpha\varphi)_0=0,\quad (\varphi'+\beta\varphi)l=0, \tag{2}$$

где α и β — положительные числа.

В некоторых случаях приходится делить граничные условия на α или β и переходить к пределу $\alpha=\infty$ или $\beta=\infty$. Поэтому граничные условия часто пишут в более общем виде:

$$(\alpha_1\varphi'-\alpha_2\varphi)_0=0,$$

$$(\beta_1\varphi'+\beta_2\varphi)_l=0.$$

Вместо того, чтобы переходить к пределу $\alpha=\infty$ или $\beta=\infty$, можно положить $\alpha_1=0$ или $\beta_1=0$.

Все соотношения, с которыми мы здесь имеем дело, имеют определенный физический смысл, и мы будем стараться в наших дальнейших рассуждениях сразу выяснить физическую значимость каждой ступени математического рассуждения.

Потенциальная энергия стержня равна

$$\int_0^l \frac{p}{2}y'^2dx.$$

Здесь $y'=\frac{\partial y}{\partial x}$ — растяжение, деформация; p — модуль упругости. Упругая потенциальная энергия пропорциональна квадрату деформации.

Пусть мы знаем, что $\lambda>0$. Тогда

$$\psi=\cos(\omega t+\varepsilon),$$

где $\omega=\sqrt{\lambda}$, и подинтегральная функция имеет вид

$$\frac{p}{2}y'^2=\frac{p}{2}\varphi'^2\cos^2(\omega t+\varepsilon).$$

Так как среднее по времени от $\cos^2(\omega t+\varepsilon)$ равно $^1/_2$, то средняя по времени потенциальная энергия в данном элементе длины равна

$$\frac{p}{4}\varphi'^2dx.$$

Аналогично его средняя по времени кинетическая энергия равна

$$\frac{\lambda q}{4}\varphi^2 dx.$$

Интегралы от этих выражений дадут средние по времени потенциальную и кинетическую энергии для всего стержня.

Если α отлично от нуля, то это значит следующее: стержень прикреплен к пружине или провод кончается на конденсаторе (рис. 149) и граничное напряжение стержня уравновешивается упругой силой пружины.

Средняя по времени потенциальная энергия пружины, если пружина находится на конце $x=0$, равна

$$\left(\frac{p}{4}\varphi\varphi'\right)_0,$$

а если пружина находится на конце $x=l$, то она равна

$$-\left(\frac{p}{4}\varphi\varphi'\right)_l.$$

В самом деле, $p\varphi'\cos(\omega t+\varepsilon)$ есть сила, а $\varphi\cos(\omega t+\varepsilon)$ — смещение. В силу граничных условий написанные выше выражения могут быть представлены в виде

$$\frac{1}{4}(\alpha p\varphi^2)_0 \text{ и } \frac{1}{4}(\beta p\varphi^2)_l.$$

Схема (1) и (2) разрешима не при всяком λ. Предположим, что некоторые λ, удовлетворяющие схеме (1) и (2), отрицательны. Тогда были бы возможны несинусоидальные движения. Мы докажем, однако, что если существуют собственные значения, то они все положительны. Доказательство довольно простое.

Умножим уравнение (1) на φ; это дает:

$$\varphi\frac{d}{dx}(p\varphi')+\lambda q\varphi^2=0,$$

или

$$\frac{d}{dx}(p\varphi\varphi')-p\varphi'^2+\lambda q\varphi^2=0.$$

Проинтегрируем теперь это уравнение по x от 0 до l:

$$\lambda\int_0^l q\varphi^2 dx=\int_0^l p\varphi'^2 dx-[p\varphi\varphi']_0^l.$$

Учтем далее граничные условия. Это дает:

$$\lambda \int_0^l q \varphi^2 dx = \int_0^l p \varphi'^2 dx + (\alpha p \varphi^2)_0 + (\beta p \varphi^2)_l. \quad (3)$$

Отсюда сразу видно, что все λ положительны, так как плотность $q(x)$ и коэффициент упругости $p(x)$ положительны. Точнее, λ всегда положительно, за исключением того случая, когда $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\varphi' = 0$. Тогда правая часть равна нулю. Это, возможно только, если стержень не закреплен на концах.

Итак, за исключением этого случая, все λ положительны, и процесс состоит из наложения синусообразных колебаний. Это свойство не только однородных систем, а общее свойство систем штурм-лиувиллевского типа.

Если α или β отрицательно, то такого заключения сделать нельзя. В случае пружин α и β положительны. Но если создать условия, при которых α или β отрицательно, то нельзя быть уверенным и в том, что будут колебания синусообразного типа. Это связано с вопросом об устойчивости.

Возможно ли, что одному и тому же λ соответствуют два решения, т. е. что при одной и той же частоте существуют различные формы колебаний? Докажем, что при граничных условиях вида (2) это невозможно.

Линейное однородное уравнение (1) имеет два линейно независимых решения φ_1 и φ_2, и всякое решение имеет вид

$$\varphi = C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2,$$

где C_1 и C_2 — постоянные.

Предположим, что при данном λ есть *два* независимых решения, удовлетворяющих граничным условиям. Но тогда и их сумма удовлетворяет граничным условиям, так как эти условия линейны и однородны. Таким образом, если существуют два независимых решения, удовлетворяющих граничным условиям, то *всякое* решение им удовлетворяет. Но этого не может быть. Основная теорема гласит (при тех предположениях о регулярности уравнения, которые здесь выполняются), что при как угодно заданных a и b всегда существует такое решение, что

$$\varphi(0) = a, \quad \varphi'(0) = b, \quad (4)$$

т. е. через каждую точку фазовой плоскости (φ, φ') проходит одна (и только одна) интегральная кривая. Граничные условия связы-

вают φ и φ'. Если бы всякое решение удовлетворяло граничным условиям (2), нельзя было бы удовлетворить условиям (4) при любых a и b.

Итак, не может быть двух независимых решений, которые оба удовлетворяли бы граничным условиям. При данном λ (заданной частоте) возможна только *одна* форма колебания.

Мы знаем, что в случае однородного стержня, замкнутого в кольцо (рис. 154), *для каждого* λ *имеется две независимые формы колебаний*, но это не противоречит только что доказанному утверждению, так как здесь граничные условия совсем другого типа:

$$\varphi(0) = \varphi(l), \quad \varphi'(0) = \varphi'(l).$$

Каждое из них относится к *двум* значениям x. Этот случай показывает, однако, что не всегда период определяет форму колебания.

Если для данного λ существует единственная собственная функция, то это собственное значение называют простым или однократным. Таким образом, при граничных условиях штурм-лиувиллевского типа все собственные значения однократны.

Что означает физически соотношение (3)? Левая часть его есть средняя по времени кинетическая энергия, правая — средняя по времени потенциальная энергия (второй и третий члены правой части представляют собой среднюю по времени энергию конденсаторов или пружин). При колебаниях такой системы (стержня) в определенном тоне средняя потенциальная энергия равна средней кинетической. Это несправедливо для отдельных элементов стержня: в узлах смещения средняя кинетическая энергия — нуль, средняя потенциальная энергия велика; в узлах деформации потенциальная энергия равна нулю. Но, повторяю, для данного тона средняя кинетическая и средняя потенциальная энергии всей системы в целом равны друг другу.

Сформулируем очень важную теорему, но для частного случая. Пусть концы закреплены. Тогда, согласно (3),

$$\lambda = \frac{\int_0^l p\,\varphi'^2\,dx}{\int_0^l q\,\varphi^2\,dx}. \tag{5}$$

Пусть найдена собственная функция для некоторого λ. Если λ почему-нибудь нам неизвестно, то можно вычислить эту величину по формуле (5). *Это* замечание немногого стоит. Но существует

замечательное свойство, чрезвычайно изящная теорема, заключающаяся в следующем. Подставим в (5) какую-нибудь функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую краевым условиям. Пусть мы угадали или разыскали такую функцию $\varphi(x)$, при которой выражение (5) минимально. Тогда оказывается: 1) такая функция является собственной функцией, и 2) соответствующее значение отношения (5) равно наинизшему собственному значению, т. е. квадрату наинизшей собственной частоты (частный случай теорем Куранта).

Эта теорема имеет важные применения. Из нее следует, например, что если в каком угодно месте системы мы увеличиваем массу, то частота основного тона может только уменьшаться. Подобное утверждение вовсе не самоочевидно. Например, если мы увеличиваем массу физического маятника, то его период может при этом увеличиться, но может и уменьшиться.

Докажем сформулированную нами теорему. (Раньше существование собственных функций принималось на веру. Теперь мы знаем, что необходимо отдельно *доказать* существование такой функции. Мы докажем, что если собственная функция существует, то для нее имеет место сформулированная нами теорема.)

Обозначим выражение (5), рассматриваемое как функционал от $\varphi(x)$, буквой I. Пусть $\varphi(x)$ обращает I в минимум. Тогда при подстановке $\varphi(x)$ вариация выражения I обращается в нуль. Варьируя, получаем:

$$\delta I \sim 2\int_0^l p\varphi'\delta\varphi'\,dx \int_0^l q\,\varphi^2\,dx - 2\int_0^l q\,\varphi\delta\varphi\,dx \int_0^l p\varphi'^2\,dx = 0.$$

Разделим это уравнение на $\int_0^l q\,\varphi^2\,dx$. Получаем, принимая во внимание (5):

$$\int_0^l p\,\varphi'\,\delta\varphi'\,dx - \lambda\int_0^l q\,\varphi\delta\varphi\,dx = 0.$$

Но

$$\delta\varphi' = \delta\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\delta\varphi.$$

Беря первый интеграл по частям, получаем:

$$\left[p\varphi'\,\delta\varphi\right]_0^l - \int_0^l \frac{d}{dx}(p\varphi')\,\delta\varphi\,dx - \lambda\int_0^l q\,\varphi\delta\varphi\,dx = 0.$$

Так как концы закреплены, имеем на концах:

$$\delta\varphi = 0$$

(сравниваются только функции $\varphi(x)$, обращающиеся на концах в нуль). Следовательно.

$$\int_0^l \left[\frac{d}{dx}(p\varphi') + \lambda q\varphi\right]\delta\varphi\, dx = 0. \tag{6}$$

Так как $\delta\varphi$ — произвольная функция от x, из (6) следует, что

$$\frac{d}{dx}(p\varphi') + \lambda q\varphi = 0.$$

Итак, функция $\varphi(x)$, обращающая λ в минимум, удовлетворяет уравнению (1), что и требовалось доказать. Эту теорему легко распространить на общий случай краевых условий задачи Штурма — Лиувилля.

Мы доказали теорему, относящуюся к наинизшему собственному тону системы. Теорема может быть распространена и на все остальные тоны, но там нужно искать минимум выражения (5) при известных добавочных условиях.

Отыскание всей совокупности собственных частот приводится теоремами Куранта к задачам на максимум и минимум. Из этих теорем можно сделать ряд физически интересных заключений. Теория, о которой здесь идет речь, получила очень большое значение. С ней связан метод оценки собственных частот, берущий свое начало от Релея, идея которого состоит в следующем.

В технике иногда не так важно точно знать частоту системы, как иметь уверенность в том, что она ниже некоторого опасного (вследствие возможного резонанса) значения. Подставим в выражение (5) некоторую функцию $\varphi(x)$, о которой мы заранее знаем, что она имеет приблизительно такой же характер, как собственная функция системы в частности, не имеет узлов, кроме концов интервала $(0, l)$. При этом получается некоторое значение λ. Мы можем тогда быть уверены, что основная частота лежит ниже квадратного корня из этого значения λ. Правда, это еще не дает нам указаний на то, как избежать резонанса на обертонах.

Если подставить в (5) функцию $\varphi(x)$, не очень сильно отличающуюся от истинной собственной функции, то λ будет очень близко к собственному значению. Выражение (5) мало чувствительно

к отклонению функции $\varphi(x)$ от собственной функции, поскольку около минимума λ меняется медленно. Лучше всего показать это на простом примере.

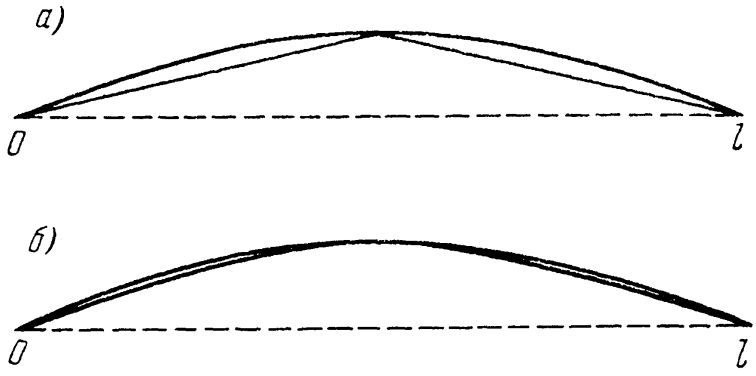


Рис. 168.

В случае однородного стержня ($p=\text{const}$, $q=\text{const}$) первая собственная функция есть

$$\varphi(x)=\sin\frac{\pi x}{l}. \tag{7}$$

При этом

$$\omega=\sqrt{\lambda}=\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{p}{q}}.$$

Если взять вместо (7) два отрезка прямых (рис. 168, *а*), то получится:

$$\omega'=\sqrt{\lambda'}=\frac{\sqrt{12}}{l}\sqrt{\frac{p}{q}},$$

т. е. расхождение на 9%. Если взять дугу параболы (рис. 168, *б*), то получится:

$$\omega''=\sqrt{\lambda''}=\frac{\sqrt{10}}{l}\sqrt{\frac{p}{q}},$$

т. е. $\omega/\omega''=0{,}9985$, что является уже прекрасной апроксимацией.

Выведем еще одно важное свойство собственных функций. Собственная функция $\varphi_i(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dx}(p\varphi_i')+\lambda_i q\varphi_i=0. \tag{8}$$

Обозначим:

$$L(\varphi)=\frac{d}{dx}(p\varphi').$$

Имеем тождественно:

$$\varphi_k L(\varphi_i) = \varphi_k \frac{d}{dx}(p\varphi_i') = \frac{d}{dx}(p\varphi_k\varphi_i') - p\varphi_i'\varphi_k',$$

откуда вытекает следующее тождество Лагранжа:

$$\varphi_k L(\varphi_i) - \varphi_i L(\varphi_k) = \frac{d}{dx}(p\varphi_k\varphi_i' - p\varphi_i\varphi_k'). \tag{9}$$

Умножая уравнение (8) на φ_k, а аналогичное уравнение для φ_k и λ_k — на φ_i, получаем:

$$\varphi_k \frac{d}{dx}(p\varphi_i') + \lambda_i q\varphi_i\varphi_k = 0;$$

$$\varphi_i \frac{d}{dx}(p\varphi_k') + \lambda_k q\varphi_i\varphi_k = 0.$$

Вычитая, находим:

$$\varphi_k L(\varphi_i) - \varphi_i L(\varphi_k) = (\lambda_k - \lambda_i) q\varphi_i\varphi_k.$$

Применяя тождество Лагранжа (9), находим:

$$\frac{d}{dx}(p\varphi_k\varphi_i' - p\varphi_i\varphi_k') = (\lambda_k - \lambda_i) q\varphi_i\varphi_k.$$

Интегрируя от 0 до l, получаем:

$$[p(\varphi_k\varphi_i' - \varphi_i\varphi_k')]_0^l = (\lambda_k - \lambda_i)\int_0^l q\varphi_i\varphi_k\,dx.$$

Левая часть здесь — нуль, так как в силу общих краевых условий имеем при $x=0$ и при $x=l$:

$$\varphi_i' = \alpha\varphi_i,\quad \varphi_k' = \alpha\varphi_k.$$

Следовательно,

$$(\lambda_i - \lambda_k)\int_0^l q\varphi_i\varphi_k\,dx = 0.$$

Это значит, что при $i \neq k$ собственные функции φ_i и φ_k ортогональны по отношению к функции $q(x)$:

$$\int_0^l q(x)\varphi_i(x)\varphi_k(x)dx = 0. \tag{10}$$

Докажем с помощью этого соотношения, что собственные значения не могут быть комплексными.

Если λ_i — комплексно, то, вообще говоря, φ_i тоже комплексно. Если уравнению (8) удовлетворяют комплексные λ_i и φ_i, то ему

удовлетворяют также λ_k и φ_k, комплексно сопряженные по отношению к λ_i и φ_i (это следует из того, что p и q действительны). При этом $\varphi_i\varphi_k$ — действительная положительная величина, равная $|\varphi_i|^2$. Условие ортогональности (10) дает:

$$\int_0^l q(x)\,|\varphi_i(x)|^2\,dx = 0,$$

что невозможно, так как $q(x) > 0$. Следовательно, все λ_i действительны и положительны.

Но тогда функции $\varphi_i(x)$ тоже действительны. В самом деле, если собственному значению λ_i соответствует комплексная собственная функция $\varphi_i = \psi_1 + i\psi_2$, то сопряженная функция $\varphi_i^* = \psi_1 - i\psi_2$ — тоже собственная функция; но тогда одному собственному значению соответствуют две собственные функции, что невозможно [1] (это было бы возможно для однородного кольца).

Каков физический смысл ортогональности собственных функций?

Пусть система колеблется в двух тонах: i-ом и k-ом. Тогда

$$y = \varphi_i \cos \omega_i t + \varphi_k \cos \omega_k t.$$

Кинетическая энергия на единицу длины есть $\frac{q}{2}\dot{y}^2$. При подстановке y здесь появится удвоенное произведение

$$\omega_i\omega_k\, q\, \varphi_i\varphi_k \sin \omega_i t \sin \omega_k t.$$

Полная кинетическая энергия всего стержня будет

$$T = T_i + T_k + \omega_i\omega_k \sin \omega_i t \sin \omega_k t \int_0^l q\,\varphi_i\varphi_k\,dx,$$

где T_i и T_k зависят соответственно от каждого из колебаний φ_i и φ_k в отдельности. Вследствие свойства ортогональности (10) член взаимодействия пропадает и остается

$$T = T_i + T_k.$$

Таким образом, кинетические энергии двух колебаний независимы.

Для потенциальной энергии двух колебаний член взаимодействия будет

$$\int_0^l p\,\varphi_i'\varphi_k'\,dx.$$

[1] [Здесь исключается тривиальный случай, когда $\varphi_i(x)$ содержит *постоянный* комплексный множитель. Если $\varphi_i(x)$ — собственная функция, то $a\,\varphi_i(x)$, где a — комплексное число, тоже собственная функция.]

Можно показать, что в случае закрепленных концов ($\varphi = 0$ на концах) или свободных концов ($\varphi' = 0$ на концах) функции φ'_i и φ'_k тоже ортогональны [по отношению к $p(x)$] и потенциальные энергии двух колебаний независимы. Но в случае общих краевых условий это не так, вместо условия ортогональности (10) получается:

$$\int_0^l p\,\varphi'_i\varphi'_k\,dx + \left[\frac{p}{\alpha}\varphi'_i\varphi'_k\right]_0 + \left[\frac{p}{\beta}\varphi'_i\varphi'_k\right]_l = 0. \qquad (11)$$

Смысл этого соотношения заключается в том, что потенциальные энергии i-того и k-того колебаний складываются также и здесь, но с учетом потенциальной энергии пружин на концах. Простой ортогональности (10) здесь быть не может, потому что не вся потенциальная энергия (в отличие от кинетической) находится в самом стержне. Уравнение (11) определяет некоторое обобщенное понятие ортогональности. Иногда ее называют „нагруженной ортогональностью".

Выражение типа (11) можно рассматривать как интеграл в некотором обобщенном смысле — интеграл Стильтьеса.

ДЕВЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(19/I 1932 г.)

Уравнение для отыскания собственных значений. Случай, когда нет собственных значений. Случай, когда любое число является собственным значением. Вычисление решений дифференциального уравнения в виде ряда по степеням параметра. Теорема о существовании бесчисленного множества собственных значений задачи Штурма—Лиувилля (начало).

Мы вывели в прошлый раз ряд основных свойств собственных значений задачи Штурма—Лиувилля, но нам еще остается доказать само существование собственных значений, а также то, что они образуют бесконечное множество, не имеющее точек сгущения в конечной области. Исследование этих вопросов — дело трудное, так как мы не можем получить, вообще говоря, в замкнутой форме выражения для собственных функций и собственных значений.

Возникает еще другой вопрос: как практически вычислять собственные значения и собственные функции? Существует *систематический* способ, который при достаточном терпении приводит к желаемому результату. Существуют также простые или плохо обоснованные способы, специфичные для разных частных случаев.

Предположим, что собственные значения существуют и посмотрим, как можно их вычислить. Наша задача записывается так:

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi}{dx}\right)+\lambda\bar{q}\varphi=0, \tag{1}$$

$$(\bar{\alpha}_1\varphi-\bar{\alpha}_2\varphi')_0=0, \tag{2}$$

$$(\bar{\beta}_1\varphi+\bar{\beta}_2\varphi')_l=0, \tag{3}$$

причем

$$\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2>0,\ \bar{\beta}_1\bar{\beta}_2>0. \tag{4}$$

Мы можем несколько упростить уравнение (1), введя вместо x новую переменную:

$$\xi=\int_0^x\frac{dx}{p(x)}.$$

Такое преобразование всегда возможно, так как

$$p(x)>0.$$

Имеем:

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{d\varphi}{d\xi}\cdot\frac{1}{p},$$

и, следовательно, уравнение (1) принимает вид

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}+\lambda q(\xi)\varphi=0,$$

где

$$q(\xi)=p(x)\bar{q}(x).$$

Таким образом, наша задача записывается теперь так (вместо ξ мы снова пишем x):

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\lambda q(x)\varphi=0, \tag{5}$$

$$(\alpha_1\varphi-\alpha_2\varphi')_0=0, \tag{6}$$

$$(\beta_1\varphi+\beta_2\varphi')_l=0, \tag{7}$$

где

$$\alpha_2 = \frac{\overline{\alpha_2}}{p_0}, \quad \beta_2 = \frac{\overline{\beta_2}}{p_l}. \tag{8}$$

Следует помнить, что здесь l имеет другой смысл, чем в (3). Мы обозначили через l значение ξ, соответствующее прежнему $x=l$. Итак, мы можем рассматривать вместо (1) уравнение, в котором $p(x)=1$.

В обычной классической задаче о решении дифференциального уравнения задаются φ и φ' для *одной* точки. В интересующей нас задаче заданы два условия для φ и φ' в *двух* точках. Но мы будем опираться при решении исследуемой задачи на то, что известно относительно классической задачи.

Уравнение (5) линейно. Если φ_1 — решение уравнения (5), то $C\varphi_1$, где C — постоянная, тоже решение.

Известно, что уравнение (5) имеет фундаментальную систему решений φ_1 и φ_2, такую, что *любое* решение, вся совокупность решений, может быть представлена в виде

$$\varphi = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2, \tag{9}$$

где C_1 и C_2 — постоянные.

Если заданы φ и φ' для $x=0$, то, подобрав соответственно C_1 и C_2, всегда можно найти решение (9), удовлетворяющее этим условиям.

Возьмем для простоты в качестве φ_1 решение, удовлетворяющее при $x=0$ условиям

$$\varphi_1(0)=1, \quad \varphi_1'(0)=0, \tag{10}$$

а в качестве φ_2 — решение, удовлетворяющее условиям

$$\varphi_2(0)=0, \quad \varphi_2'(0)=1. \tag{11}$$

Такие решения существуют в силу основной теоремы теории дифференциальных уравнений. Выясним, образуют ли эти решения фундаментальную систему. Вспомним, что необходимое и достаточное условие того, что φ_1 и φ_2 образуют фундаментальную систему, таково:

$$W(x)=\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Для нашего уравнения (5) очень легко доказать теорему, утверждающую, что если детерминант $W(x)$ отличен от нуля для

какого-то *одного* значения x, то он отличен от нуля для *всех* значений x. Но в нашем случае

$$W(0)=\begin{vmatrix} \varphi_1(0) & \varphi_2(0) \\ \varphi_1'(0) & \varphi_2'(0) \end{vmatrix}=1.$$

Следовательно, для любого x

$$W(x)\neq 0$$

и решения φ_1 и φ_2 образуют фундаментальную систему.

Решим теперь основной вопрос: существует ли решение, удовлетворяющее граничным условиям (6) и (7). Запишем их сокращенно в таком виде:

$$l_1(\varphi)=0; \tag{12}$$

$$l_2(\varphi)=0. \tag{13}$$

Операторы l_1 и l_2 линейны:

$$l_{1,2}(\varphi_1+\varphi_2)=l_{1,2}(\varphi_1)+l_{1,2}(\varphi_2);$$

$$l_{1,2}(C\varphi)=Cl_{1,2}(\varphi).$$

Если краевая задача (5)—(7) имеет решение, то оно содержится в (9), так как в этом семействе функций содержатся *все* решения уравнения (5). Таким образом, вопрос сводится к тому, можно ли подобрать C_1 и C_2 так, чтобы удовлетворить условиям (6) и (7).

Укажем явно, что наши решения φ_1 и φ_2 зависят от параметра λ, т. е. будем писать их в виде

$$\varphi_1=\varphi_1(x,\lambda),\quad \varphi_2=\varphi_2(x,\lambda).$$

Потребуем, чтобы решение (9) удовлетворяло граничным условиям:

$$\left.\begin{aligned} C_1 l_1(\varphi_1)+C_2 l_1(\varphi_2)&=0,\\ C_1 l_2(\varphi_1)+C_2 l_2(\varphi_2)&=0. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Эти уравнения линейны и однородны по отношению к C_1 и C_2. Они всегда имеют тривиальное решение:

$$C_1=C_2=0,$$

но оно нас не интересует. Нам нужно, чтобы по крайней мере

одна из констант C_1 и C_2 не равнялась нулю. Уравнения (14) имеют нетривиальное решение только тогда, когда

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1[\varphi_1(\lambda)] & l_1[\varphi_2(\lambda)] \\ l_2[\varphi_1(\lambda)] & l_2[\varphi_2(\lambda)] \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

Левая часть есть некоторая трансцендентная функция от λ. Нетривиальные решения для C_1 и C_2 могут быть только при таких λ, которые удовлетворяют трансцендентному уравнению (15). Таким образом, сразу видно, что краевая задача имеет решение не при всяком λ.

Итак, мы получили трансцендентное уравнение для определения интересующих нас чисел λ. Нам нужно уметь его решать, хотя бы приближенным способом.

Вернемся к уже рассмотренному случаю однородного стержня и посмотрим, что там дает изложенный способ. Возьмем простейшие краевые условия

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(l) = 0$$

и положим для простоты:

$$q(x) = 1. \tag{16}$$

Пойдем только что указанным „лобовым“, систематическим путем. Для случая (16) мы можем написать в явном виде фундаментальную систему φ_1 и φ_2:

$$\varphi_1 = \cos\sqrt{\lambda}x, \quad \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}x.$$

Уравнения (14) здесь таковы:

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0,$$

$$C_1 \cos\sqrt{\lambda}l + C_2 \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Условие (15) имеет, следовательно, вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos\sqrt{\lambda}l & \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}l \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Это уже известное нам трансцендентное уравнение для собственных значений однородного стержня.

Вся трудность общей задачи (о неоднородном стержне) — в решении трансцендентного уравнения (15). В большинстве случаев оно находится графически, но мы займемся принципиальной стороной вопроса. Мы докажем, что уравнение (15) всегда имеет бесчисленное множество решений, образующих дискретную совокупность. Это утверждение связано с определенным типом краевых условий. Аналогично обстоит дело и в случае периодических краевых условий

$$\varphi(0)=\varphi(l), \quad \varphi'(0)=\varphi'(l)$$

или похожих условий

$$\varphi(0)=\varphi(l), \quad \varphi'(0)=-\varphi'(l). \tag{17}$$

Но если, например, мы ставим условия

$$\varphi(0)=0, \quad \varphi'(0)=0,$$

то детерминант $\Delta=1$ и нельзя подобрать λ, удовлетворяющее уравнению (15).

В случае краевых условий (17) имеем $\Delta=0$, и, следовательно, краевым условиям можно удовлетворить при любом λ. В этом легко убедиться путем элементарного рассуждения. Перенесем начало координат в середину стержня. Тогда условия (17) примут вид

$$\varphi\left(-\frac{l}{2}\right)=\varphi\left(\frac{l}{2}\right), \quad \varphi'\left(-\frac{l}{2}\right)=-\varphi'\left(\frac{l}{2}\right).$$

Им удовлетворяет любая функция вида $\cos\sqrt{\lambda}\,x$, так как косинус — четная функция, а его производная — нечетная.

Этот аппарат очень красив на бумаге, но его трудно применить практически, так как трудно найти фундаментальную систему уравнения (5) при q, зависящем от x. В первый момент может даже показаться, что этот способ практически ничего не дает.

Надо указать путь для вычисления с достаточным приближением φ_1 и φ_2 как функций λ. Общая теория говорит, что φ является непрерывной функцией от λ, а кроме того (для всякого заданного x) она является *целой* функцией от λ. (Целая функция означает — не обращающаяся в конечной области в бесконечность; $\cos\lambda$, e^{λ} —

целые функции λ). Итак, φ — целая трансцендентная функция λ, и, следовательно, ее можно искать в виде ряда по степеням λ:

$$\varphi(x, \lambda) = u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \ldots \tag{18}$$

Представив решение в таком виде, можно обрезать ряд на каком-нибудь члене и подставить полученное таким путем приближенное выражение в трансцендентное уравнение (15). Можно указать рецепт нахождения ряда (18) и доказать, что ряд сходится для всех конечных значений λ. То и другое легко сделать.

Продифференцируем дважды ряд (18):

$$\varphi'' = u_0'' + \lambda u_1'' + \lambda^2 u_2'' + \ldots \tag{19}$$

Подставим (18) и (19) в уравнение (5) и приравняем нулю коэффициенты при всех степенях λ. Мы получим:

$$u_0'' = 0, \quad u_1'' + q u_0 = 0, \ldots \quad u_n'' + q u_{n-1} = 0.$$

Такова последовательность уравнений, которым удовлетворяют функции u_n.

Условия (10), которым должно удовлетворять одно из фундаментальных решений, будут выполнены, если потребовать

$$u_0(0) = 0, \quad u_0'(0) = 1,$$

а для всех $n > 0$

$$u_n(0) = 0, \quad u_n'(0) = 0.$$

Мы получаем в результате:

$$u_0 = x.$$

Каждая функция u_n определяется из предыдущей u_{n-1} простой квадратурой:

$$u_n = -\int_0^x d\xi \int_0^\xi q(\eta)\, u_{n-1}(\eta)\, d\eta.$$

Итак, нахождение $\varphi_1(x)$ [и аналогично $\varphi_2(x)$] сведено к последовательному ряду квадратур. Мы оперировали с рядом формально, но можно показать, что ряд (18) сходится.

Оборвав ряд (18) на некотором члене, мы заменим трансцендентное уравнение (15) алгебраическим уравнением той или иной степени. При достаточно большом числе членов его корни будут как угодно близки к корням трансцендентного уравнения. Практически для основного колебания часто достаточно взять 3 — 4 члена

разложения. Для обертонов приходится брать больше членов и вычисление становится хлопотливым.

Техника выработала хорошие способы приближенного вычисления, но пока еще мало оправданные.

Перейдем к доказательству того, что существует бесчисленное множество собственных значений. Доказательства этой теоремы были даны уже давно. При этом доказательства проводились для некоторых частных граничных условий, а затем к ним сводили остальные граничные условия. Недавно появилась работа Прюфера (она изложена в третьем издании книги Бибербаха[1]), в которой доказательство проводится сразу для самого общего случая задачи Штурма—Лиувилля. Изложим это доказательство.

Введем новую переменную

$$\chi = \frac{d\varphi}{dx}$$

и напишем вместо уравнения (5) два уравнения:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \chi, \quad \frac{d\varphi}{dx} + \lambda q \varphi = 0. \tag{20}$$

Положим:

$$\varphi = \rho \sin\theta, \quad \chi = \rho \cos\theta. \tag{21}$$

Мы вводим, таким образом, две новые функции: ρ и θ. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \rho' \sin\theta + \rho\theta' \cos\theta; \\ \frac{d\chi}{dx} &= \rho' \cos\theta - \rho\theta' \sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Подставляя (22) в (20), получаем уравнения:

$$\rho' \sin\theta + \rho\theta' \cos\theta - \rho \cos\theta = 0; \tag{23}$$

$$\rho' \cos\theta - \rho\theta' \sin\theta + \lambda q \rho \sin\theta = 0. \tag{24}$$

Мы можем их преобразовать так, чтобы получилось одно уравнение для θ' и другое для ρ'. Умножим (23) на $\cos\theta$, а (24) — на $\sin\theta$, и вычтем. Это дает по сокращении на ρ (мы далее увидим, что ρ нигде не обращается в нуль):

$$\theta' = \cos^2\theta + \lambda p \sin^2\theta. \tag{25}$$

---

[1] [L. Bieberbach. Theorie der Differentialgleichungen. 3-е переработ. издание, Берлин, 1930.]

Далее умножим (23) на $\sin\theta$, а (24) — на $\cos\theta$, и сложим. Мы получим:

$$\rho' = \rho(1 - \lambda p)\sin\theta\cos\theta. \tag{26}$$

Для θ получилось уравнение (25), не содержащее ρ. Уравнение (26) решается посредством квадратуры

$$\ln|\rho| = \int_0^x (1 - \lambda p)\sin\theta\cos\theta\, dx + c. \tag{27}$$

Чтобы ее вычислить, нужно сначала решить уравнение для θ, а потом подставить решение в (26). При этом получатся две постоянные интегрирования.

Первый же шаг продвинул нас довольно значительно вперед: мы получили для θ *одно* уравнение. Но это куплено той ценой, что уравнение нелинейное. Можно легко модифицировать подход так, чтобы было удобно находить решение количественно для случая медленно или мало меняющихся $q(x)$. Но нас интересует сейчас другое — доказательство существования неограниченной последовательности собственных значений. Сейчас мы увидим, в чем заключается сила излагаемого метода.

Перепишем граничные условия (6) и (7) в таком виде:

$$\left.\begin{aligned}(\alpha_1\varphi - \alpha_2\chi)_0 &= 0,\\ (\beta_1\varphi + \beta_2\chi)_l &= 0\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

и подставим в них, вместо φ и χ, функции ρ и θ:

$$(\alpha_1\sin\theta - \alpha_2\cos\theta)_0 = 0, \quad (\beta_1\sin\theta + \beta_2\cos\theta)_l = 0.$$

Мы видим, что в граничные условия вошла только θ. Нужно удовлетворить граничным условиям, куда входит только θ, тогда будут удовлетворены и исходные граничные условия (28).

Так как α_1 и α_2 — одного знака, можно удовлетворить первому граничному условию, взяв для θ_0 определенное значение γ_1 в первом квадранте:

$$0 < \gamma_1 < \frac{\pi}{2}. \tag{29}$$

Но β_1 и β_2 тоже имеют одинаковые знаки и, следовательно, в первом квадранте заведомо нельзя удовлетворить второму граничному условию. Можно пойти во второй квадрант, там мы

найдем то, что нам нужно. Мы удовлетворим второму граничному условию, если возьмем $\theta_l = \gamma_2$, причем

$$\frac{\pi}{2} < \gamma_2 < \pi. \tag{30}$$

Теперь вся задача прояснилась. Найдя $\theta(x)$, удовлетворяющее уравнению (25) и равное γ_1 для $x=0$ и γ_2 для $x=l$, мы решим нашу основную задачу.

Если $\theta(x)$ для $x=0$ равно $\gamma_1+\pi$, $\gamma_1+2\pi$, $\gamma_1+3\pi$, ..., а для $x=l$ соответственно: $\gamma_2+\pi$, $\gamma_2+2\pi$, $\gamma_2+3\pi$,..., то это дает то же самое, поскольку тангенс периодичен с периодом π и краевые условия удовлетворяются, а $\sin^2$ и $\cos^2$ тоже периодичны с периодом π, и, следовательно, уравнение (25) тоже удовлетворится. Мы получим другое решение для θ, а именно: $\theta_2 = \theta_1 + \pi$, но это не даст ничего нового по отношению к первому решению.

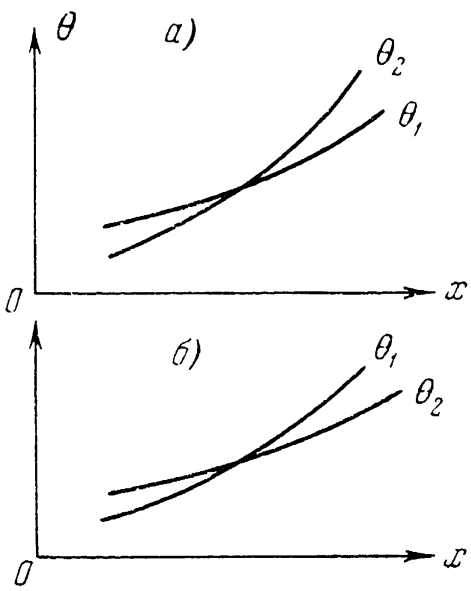


Рис. 169.

Но можно поставить другую задачу: оставить первое граничное условие $\theta(0)=\gamma_1$ и задать новое граничное условие для $x=l$, а именно: $\theta(l) = \gamma_2 + n\pi$. Если мы решим *эту* задачу, то для $\theta(x)$ получится другая функция, отличная от $\theta(x)$ при $n=0$.

Если при любом целом n мы сможем найти такое λ, что соответствующее $\theta(x)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\theta(0)=\gamma_1, \quad \theta(l)=\gamma_2+n\pi,$$

то этим будет доказано, что исходное уравнение (20) имеет бесконечное множество собственных значений.

Доказательство проводится вполне строго. Оно становится гораздо нагляднее, если поясняется геометрически.

Нелинейное уравнение (25) мы решить не можем. Но мы можем вывести из него интересующие нас свойства функции $\theta(x)$. Из уравнения (25) видно, что при λ положительном $\theta(x)$ — монотонно возрастающая функция. В самом деле, ее производная всюду положительна (она не может обращаться в нуль, так как $\cos\theta$ и $\sin\theta$ не могут быть равны нулю одновременно).

Рассмотрим уравнение (25) при различных λ. Величину $\lambda q(x)$ обозначим через $\sigma(x)$:

$$\theta' = \cos^2\theta + \sigma(x)\sin^2\theta.$$

Обозначим индексами 1 и 2 две различные функции $\sigma(x)$ и соответствующие им $\theta(x)$:

$$\theta'_1 = \cos^2\theta_1 + \sigma_1(x)\sin^2\theta_1,$$

$$\theta'_2 = \cos^2\theta_2 + \sigma_2(x)\sin^2\theta_2.$$

Пусть всюду

$$\sigma_2(x) > \sigma_1(x).$$

Кривые $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ обе монотонно поднимаются с ростом x. Они могут пересекаться. Если они пересекаются, то только так, что при увеличении x за точку пересечения θ_2 идет выше θ_1 (рис. 169, *а*). Они не могут пересечься так, как на рис. 169, *б* поскольку производная θ'_1 меньше производной θ'_2 (σ_1 меньше, чем σ_2). Значит, в точке пересечения $\theta'_1 < \theta'_2$. Но, может быть, они пересекаются в точке, где $\sin\theta = 0$? Для этого значения x обе производные одинаковы. Тогда кривые касаются. Я утверждаю, однако, что и здесь кривая θ_2 пойдет выше. Действительно, кривые касаются в одной точке (они не могут касаться по целому отрезку). Для соседних интегральных кривых $\sin\theta_2 \neq 0$. Различные интегральные кривые θ_2 пересекаться между собой не могут (особых точек нет). Значит, и в этом случае после пересечения (касания) кривая θ_2 пойдет выше θ_1. В итоге мы заключаем, что если кривые θ_1 и θ_2 один раз пересеклись, то они уже не могут пересечься второй раз.

Будем теперь сравнивать функции $\theta(x)$ для различных λ при одном и том же $q(x)$. Будем рассматривать решение как функцию от λ. Функция $\sigma(x) = \lambda q$ растет при любых x вместе с λ.

Теперь ясно, как мы докажем, что существует бесконечная последовательность собственных значений.

Если θ_1 и θ_2, соответствующие $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$ ($\lambda_2 > \lambda_1$), выходят при $x = 0$ из одной точки, то значит, при $x > 0$ всюду $\theta_2 > \theta_1$, так как кривые не могут пересекаться. Чем больше значение λ, тем выше проходит кривая θ и тем выше она пересекает прямую $x = l$. Для того, чтобы доказать то, что нам нужно, необходимо доказать, что при $\lambda = 0$ кривая $\theta(x)$ пересекает прямую $x = l$ ниже точки γ_2, а при $\lambda \to \infty$ точка пересечения с прямой $x = l$

не стремится к конечному пределу. Первое нужно для того, чтобы доказать существование наименьшего собственного значения, второе — для того, чтобы убедиться в существовании бесконечного числа собственных значений без точек сгущения.

Если эти два утверждения удастся доказать, то теорема будет доказана.

ДЕСЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(23/I 1932 г.)

Окончание доказательства основной теоремы о собственных значениях задачи Штурма—Лиувилля. Число узлов собственных функций. Оценки собственных значений. Изменение собственных значений при изменении параметров. Массы и индуктивности на концах распределенной системы.

Для того, чтобы закончить рассмотрение собственных колебаний распределенных систем, мы должны сегодня завершить доказательство фундаментальной теоремы о счетном множестве собственных значений в задаче Штурма—Лиувилля.

Мы выяснили, что если при заданном целом n можно найти такое λ, при котором уравнение (25) предыдущей лекции имеет решение $\theta(x)$, проходящее через точки $x=0$, $\theta=\gamma_1$ и $x=l$, $\theta=\gamma_2+n\pi$, то это λ есть собственное значение нашей краевой задачи, а $\theta(x)$ — соответствующая собственная функция.

Решения уравнения (25) монотонно возрастают с x. Далее мы получили следующий результат. Если λ_1 и λ_2 — два различных значения λ, причем $\lambda_2 > \lambda_1$, так что

$$\sigma_2(x)=\lambda_2 q(x) > \sigma_1(x)=\lambda_1 q(x),$$

и если

$$\theta(0,\ \lambda_2)=\theta(0,\ \lambda_1),$$

то для всякого $x>0$

$$\theta(x,\ \lambda_2) > \theta(x,\ \lambda_1) \tag{1}$$

и, в частности,

$$\theta(l,\ \lambda_2) > \theta(l,\ \lambda_1).$$

Из общей теории дифференциальных уравнений следует, что $\theta(x,\ \lambda)$ есть непрерывная функция параметра λ. Неравенство (1) означает, что эта функция — монотонно возрастающая.

Теперь мы пойдем дальше. Мы хотим доказать, что

$$\theta(l, 0) \leqslant \gamma_2. \tag{2}$$

Итак, полагаем $\lambda = 0$. Тогда уравнение (25) предыдущей лекции принимает вид

$$\theta' = \cos^2 \theta. \tag{3}$$

Одно частное решение можно указать сразу:

$$\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Это решение (θ — постоянно) соответствует граничным условиям для случая, когда оба конца свободны ($\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$). Отбросим этот специальный случай. Посмотрим, что будет в остальных случаях.

Уравнение (3) не трудно проинтегрировать. Мы получаем общее решение:

$$\operatorname{tg} \theta = x + C.$$

Отсюда следует, что если при $x = 0$ $\theta = \gamma_1 < \frac{\pi}{2}$, то как бы x ни возрастало, θ остается меньше $\frac{\pi}{2}$:

$$\theta(l, 0) \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Но $\gamma_2 \geqslant \frac{\pi}{2}$ [см. неравенство (30) предыдущей лекции], и, следовательно, (2) доказано.

Что можно сказать об изменении θ при неограниченном росте λ? Если вместо $q(x)$ мы подставим в уравнение (25)

$$m^2 = q_{\min},$$

то для данного λ, вместо $\lambda q(x)$, будет стоять меньшая функция $\lambda m^2 \leqslant \lambda q(x)$. Обозначим через $\bar{\theta}$ решение нового уравнения:

$$\bar{\theta}' = \cos^2 \bar{\theta} + \lambda m^2 \sin^2 \bar{\theta}. \tag{4}$$

На основании того, что мы раньше доказали, мы знаем, что если $\bar{\theta}(0, \lambda) = \theta(0, \lambda)$, то $\bar{\theta}(x, \lambda) < \theta(x, \lambda)$ при $x > 0$. Следовательно, если мы докажем, что при $\lambda \to \infty$ величина $\bar{\theta}(l, \lambda) \to \infty$, то это будет подавно справедливо для $\theta(l, \lambda)$.

Но в уравнении (4) переменные разделяются и получается хорошо известный интеграл:

$$m\sqrt{\lambda}\,\mathrm{tg}\,\bar{\theta} = \mathrm{tg}\,(m\sqrt{\lambda}\,x + C).$$

При $x = l$ имеем:

$$m\sqrt{\lambda}\,\mathrm{tg}\,\bar{\theta} = \mathrm{tg}\,(m\sqrt{\lambda}\,l + C), \tag{5}$$

откуда мы видим, что при $\lambda \to \infty$ также и $\bar{\theta}(l, \lambda) \to \infty$. Действительно, при λ таком, что

$$m\sqrt{\lambda}\,l + C = \frac{\pi}{2},$$

правая часть (5) обращается в бесконечность. При этом $m\sqrt{\lambda}\,\mathrm{tg}\,\bar{\theta}$ тоже обращается в бесконечность, т. е.

$$\bar{\theta} = \frac{\pi}{2}.$$

При дальнейшем росте λ правая часть делается отрицательной, причем по смыслу задачи $\bar{\theta}$ при этом растет. Если в правой части, благодаря возрастанию λ, аргумент увеличивается на π, то и в левой части аргумент $\bar{\theta}$ возрастает на π.

Таким образом, наряду с тем, что

$$\theta(l, 0) < \gamma_2,$$

мы доказали, что при $\lambda \to \infty$

$$\theta(l, \lambda) \to \infty.$$

Еще одно замечание. Число добавляющихся π для $\bar{\theta}$ равно или больше того, сколько раз π прибавляется к аргументу $m\sqrt{\lambda}\,l$. Поэтому θ не может обратиться в ∞ раньше, чем λ обратится в ∞.

Докажем теперь основную теорему.

На оси ординат (рис. 170) отложим отрезок γ_1. Построим для произвольно выбранного λ кривую $\theta(x, \lambda)$. Она отсекает на прямой $x = l$ некоторый отрезок $\theta(l, \lambda)$. Мы доказали, что его длина непрерывно возрастает с ростом λ. При этом кривые поворачиваются и будут при $\lambda = \infty$ пересекать ось $x = l$ в бесконечности. При некотором $\lambda = \lambda_0$ кривая непременно попадет в γ_2, при некотором $\lambda = \lambda_1$ — в $\gamma_2 + \pi$, при некотором $\lambda = \lambda_2$ — в $\gamma_2 + 2\pi$ и т. д.

Каждый раз, как кривая будет попадать в одну из этих точек, будет получаться нужное нам решение, удовлетворяющее краевым условиям (28), которые мы писали в предыдущей лекции. $\theta(l, \lambda)$ — непрерывная функция λ. Непрерывная же функция пробегает *все* значения в интервале между крайними точками. Отсюда мы заключаем, что наверняка существуют такие значения $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ параметра λ, которые можно расположить в порядке возрастания $(0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots)$, и такие, что

при $\lambda = \lambda_0$ $\theta(l, \lambda) = \gamma_2$,
при $\lambda = \lambda_1$ $\theta(l, \lambda) = \gamma_2 + \pi$,
при $\lambda = \lambda_2$ $\theta(l, \lambda) = \gamma_2 + 2\pi$,
. . . . . .

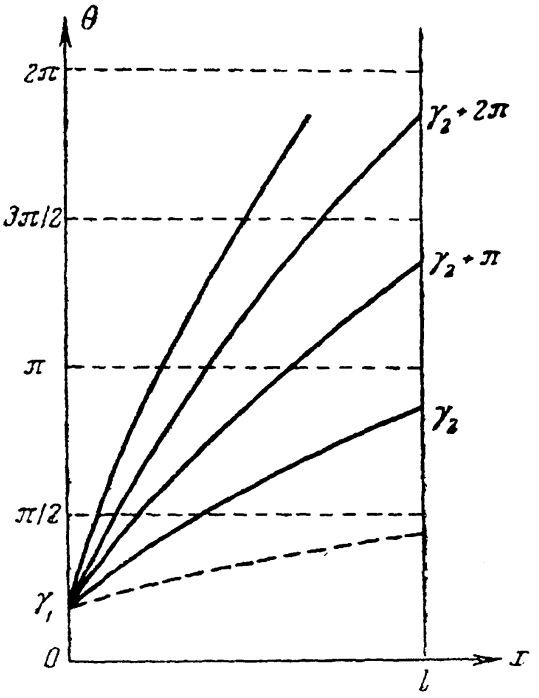


Рис. 170.

Ряд этих значений λ — собственных значений нашей задачи — не может иметь точек сгущения в конечной области. В самом деле, $\theta(l, \lambda)$ — непрерывная функция λ. Если бы были два сколь угодно близкие значения λ, то существовали бы два сколь угодно близкие значения $\theta(l, \lambda)$, а мы знаем, что этого не может быть.

Говоря физически, каждый обертон выше предыдущего и частота колебаний с ростом обертона растет в бесконечность.

Для определенного λ функция θ однозначно определена. Это значит, что для каждой частоты существует определенная форма колебания. Различных форм для одной частоты быть не может.

Возьмем какое-нибудь λ_n. При этом

$$\theta(l, \lambda_n) = \gamma_2 + n\pi.$$

Функция $\theta(x, \lambda_n)$ — монотонно возрастающая функция, ее производная, вообще говоря, не постоянна (рис. 170). Обращается ли собственная функция $\varphi = \rho \sin\theta$, соответствующая $\lambda = \lambda_n$, в нуль где-нибудь на протяжении длины стержня? И если да, то сколько раз?

Существует значение x, при котором $\theta = \pi$ и $\sin\theta = 0$. Так как θ — монотонная функция x, то она принимает это значение

только один раз. Кривая $\theta(x)$ пересекает прямые $\theta=2\pi$, $\theta=3\pi$, ... Имеется n таких прямых. Таким образом, внутри интервала $(0, l)$ собственная функция n раз обращается в нуль. Какую бы систему мы ни взяли, n-ой гармонике всегда соответствует n узлов. Мы уже знаем, что в однородном стержне при $\lambda=\lambda_0$ нет ни одного узла, при $\lambda=\lambda_1$ — один узел и т. д. (см. рис. 156. Теперешняя нумерация обертонов отличается от прежней: $n=s-1$). Число узлов (не на концах) равно номеру обертона. Мы видим теперь,



Рис. 171.

что это свойство имеет место и в самом общем случае. Его можно описать и так: система подразделяется на $n+1$ отрезок, причем смежные отрезки колеблются в противоположных фазах (рис. 171). Это обстоятельство очень важно в вопросах излучения.

Есть один случай кажущегося противоречия — случай открытых концов. Мы склонны сказать, что на рис. 172 изображен основной тон. Тут есть один узел. Между тем при основном тоне его не должно быть. Но дело в том, что при обоих свободных концах существует собственное значение $\lambda=0$. Мы должны рассматривать в качестве основного тона движение, соответствующее $\lambda=0$. Но в вопросах колебаний это движение нас не интересует (собственная функция здесь — постоянная). Основной тон открытой на концах антенны соответствует статическому заряду, первый обертон — колебанию в полволны и т. д.

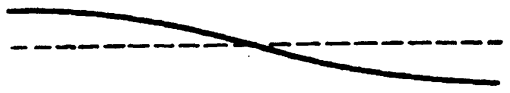


Рис. 172.

Мы доказали основную теорему существования. Рассмотрим теперь некоторые ее физические следствия.

При увеличении λ кривые $\theta(x, \lambda)$ непрерывно поднимаются. Выбрав какую-нибудь точку $\theta(l)$, мы тем самым задаем определенное значение λ. Интервалу значений $\theta(l)$ соответствует определенный интервал значений λ. Граничные условия были такие: $\theta(l)=\gamma_2+n\pi$, причем γ_2 лежит между $\pi/2$ и π. Это объясняется тем, что

$$\operatorname{tg}\gamma_2=-\frac{\beta_2}{\beta_1},$$

где β_1 и β_2 — одного знака. Последнее вытекает из физических соображений; например: β_2/β_1 есть отношение емкости на единицу длины провода к емкости C_0 приключенного к его концу конденсатора.

Будем теперь при одном и том же $q(x)$ задавать различные граничные условия (например, меняя емкость конденсатора.) Этим мы будем задавать различные точки $\theta(l)$. Но как бы мы ни изменяли емкость конденсатора, мы не выйдем для γ_2 за „зарубки" $\pi/2$ и π. Нельзя посадить конечную точку в интервал между π и $3\pi/2$. Отсюда следует, что нельзя перекрыть всю шкалу частот колебаний, меняя только емкость конденсатора, приключенного на конце.

В случае однородной системы, открытой на одном конце (рис. 149, *а*), при $C_0 = \infty$ имеем:

$$\lambda_0 = \frac{c}{4l}, \tag{6}$$

а при $C_0 = 0$

$$\lambda_0 = \frac{c}{2l}. \tag{7}$$

Вращая конденсатор, мы можем перейти непрерывно от значения (6) к значению (7), но дальше остается разрыв: первый обертон при $C_0 = \infty$ имеет квадрат частоты

$$\lambda_1 = \frac{3c}{4l}.$$

Разрыв между $c/2l$ и $3c/4l$ нельзя перекрыть путем подбора C_0. Есть запретные зоны, в которые нельзя попасть, меняя условия на *одном* конце.

Изменим теперь, попрежнему не меняя саму распределенную систему, граничные условия на *обоих* концах. Собственное значение λ изменится: увеличится или уменьшится. Наклон интегральных кривых станет всюду (т. е. при любых x) либо больше, либо меньше, чем прежде. Будем сравнивать интересующий нас случай со случаем закрепленных концов, когда $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \pi$ (рис. 173). Мы видим, что система дает наивысший тон тогда, когда закреплены оба конца, а наинизший — когда оба конца свободны. При данной распределенной системе самая низкая частота соответствует двум свободным концам.

Вообще говоря, вычислить λ_n совсем нелегко. Но можно указать некоторые пределы, между которыми заключены λ_n. Будем

сравнивать *два* случая. Граничные условия в обоих случаях одни и те же, но в одном из них $q=q_1(x)$, а в другом $q=q_2(x)$. Пусть для всех x

$$q_2(x)>q_1(x).$$

Покажем, что

$$\lambda_n^{(2)}\leqslant\lambda_n^{(1)}.$$

Интегральные кривые θ_1 и θ_2, соответствующие обоим $q(x)$, должны проходить через одни и те же концевые точки (рис. 174).

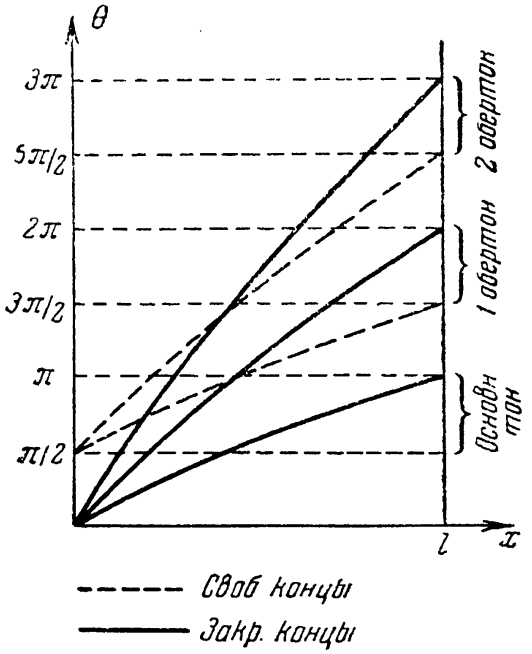


Рис. 173.

Если $\lambda_n^{(2)}>\lambda_n^{(1)}$, то во всем интервале $(0,\ l)$ имеем:

$$\lambda_n^{(2)}q_2>\lambda_n^{(1)}q_1,$$

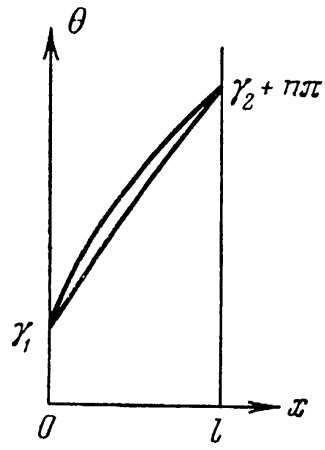


Рис. 174.

и если $\theta_2(0)=\theta_1(0)$, то при $x>0$ всюду $\theta_2'(x)>\theta_1'(x)$. Следовательно, $\theta_2(l)=\theta_1(l)$ невозможно, а значит, $\lambda_n^{(2)}$ равно или меньше $\lambda_n^{(1)}$. Если $\lambda_n^{(2)}<\lambda_n^{(1)}$, то может быть так, что в части интервала $\theta_2'(x)>\theta_1'(x)$, в другой части $\theta_2'(x)<\theta_1'(x)$, и равенство $\theta_2(l)=\theta_1(l)$ возможно.

Таким образом, с увеличением $q(x)$ частота n-го обертона уменьшается или в крайнем случае остается постоянной.

Вспомним теперь, что

$$q(x)=p(x)\bar{q}(x),$$

причем $\bar{q}(x)$ — плотность, $p(x)$ — коэффициент упругости. Было бы ошибкой сразу же сделать из доказанного выше заключение, что при увеличении $\bar{q}$ частоты уменьшаются; дело в том, что p вхо-

дит в уравнение, преобразованное от x к ξ, а при этом преобразовании меняется не только дифференциальное уравнение, но и длина интервала $(0, l)$. Но не трудно провести исследование того, как изменяются собственные значения при изменении q. При этом получается следующий результат.

Если $q(x)$ изменяется так, что новые значения $q(x)$ всюду больше или равны прежним, причем изменение $q(x)$ происходит не в отдельных точках, а на конечных интервалах, то все λ уменьшаются. На основании этой теоремы можно делать хорошие оценки собственных значений.

Заменим в уравнении

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda q(x)\varphi = 0 \tag{8}$$

$q(x)$ на

$$m^2 = q_{\min}.$$

Получатся новые собственные значения λ'_n, причем

$$\lambda_n \leqslant \lambda'_n.$$

Возьмем теперь вместо $q(x)$

$$M^2 = q_{\max}.$$

Опять получатся новые собственные значения λ''_n, причем

$$\lambda_n \geqslant \lambda''_n.$$

Итак,

$$\lambda''_n \leqslant \lambda_n \leqslant \lambda'_n,$$

а величины λ'_n и λ''_n легко вычислить.

Рассмотрим далее такую задачу. Дано дифференциальное уравнение (8), но граничные условия не даны. В каких пределах лежат собственные значения?

Воспользуемся тем, что наибольшая частота получается при закреплении концов. При обоих закрепленных концах мы имели бы в случае, если вместо $q(x)$ плотность была бы равна m^2,

$$\lambda_n = \frac{(n+1)^2\pi^2}{l^2m^2}.$$

Следовательно, в интересующей нас системе

$$\lambda_n \leqslant \frac{(n+1)^2\pi^2}{l^2m^2}.$$

Воспользуемся теперь тем, что наименьшие частоты получаются при свободных концах (надо только иметь в виду, что при этом наименьшее λ равно нулю). Для свободных концов мы имели бы в случае, если бы вместо $q(x)$ плотность была равна M^2,

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2M^2}.$$

Следовательно, для произвольных граничных условий

$$\frac{n^2\pi^2}{l^2M^2} \leqslant \lambda_n \leqslant \frac{(n+1)^2\pi^2}{l^2m^2}.$$

Эти неравенства дают хорошую оценку и в тех случаях, когда функция $q(x)$ изменяется в небольшом интервале.

Если закрепить систему в середине, она распадается на две независимые половинки. Естественно предположить, что частоты при этом увеличатся. Для постоянной плотности это ясно; но так ли это, если плотность растет с x? Правая система короче исходной, но средняя плотность ее больше. Что побеждает — наперед сказать трудно. Существует теорема, на основании которой сразу можно сказать, что будет повышение частоты [1].

Мы решили очень интересную для физики задачу, записывающуюся в виде схемы:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial y}{\partial x}\right) = q\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}; \tag{9}$$

$$\left(\alpha_1 y - \alpha_2\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0 = 0; \tag{10}$$

$$\left(\beta_1 y + \beta_2\frac{\partial y}{\partial x}\right)_l = 0. \tag{11}$$

Вспомним физический смысл граничных условий (10) и (11). Для стержня они означают, что концы связаны с неподвижными точками через пружины, для электрической системы — что на концах включены емкости. Таким образом, мы охватили случай, когда на концах находятся резервуары потенциальной или электрической энергии.

С точки зрения физики случаями того же класса являются те, когда вместо конденсаторов на концах включены катушки самоиндукции, вместо пружин к концам прикреплены массы, т. е.

---

[1] [Р. Курант и Д. Гильберт. Методы математической физики, т. I, гл. VI, § 2. М.—Л., 1951.]

случаи, когда на концах имеются резервуары кинетической или магнитной энергии. Между этими случаями и прежними нет существенного физического различия.

Дифференциальное уравнение (9) здесь сохраняется, но граничные условия получаются другого типа.

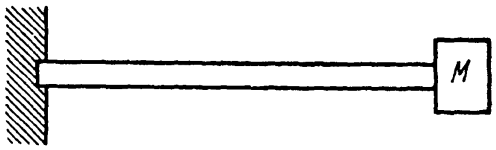


Рис. 175.

Пусть на конце стержня укреплена масса M (рис. 175). Тогда при $x=l$ имеем условие

$$M\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-p(l)\frac{\partial y}{\partial x}, \tag{12}$$

отличное от (11): вместо члена с y имеется член с $\partial^2 y/\partial t^2$. Если подставить в граничное условие выражение

$$y=\varphi(x)\cos\sqrt{\lambda}\,t,$$

то получится:

$$\lambda\varphi(l)-p(l)\varphi'(l)=0.$$

Отличие от (11) в том, что, во-первых, здесь перед $p\varphi'$ стоит знак минус, и, во-вторых, в том, что в граничное условие входит параметр λ. Таким образом, случай массы на конце не охватывается той теорией, которая была изложена. В этом есть известная неудовлетворительность.

Рассмотрение новой задачи дает для собственных значений результаты, совпадающие с полученными прежде. Но для собственных функций получается отличие; здесь собственные функции разного номера не ортогональны между собой.

Однако это отличие исчезает при другом выборе переменной. Если вместо задачи для заряда (или тока) и смещения рассматривать задачу для электрического или механического напряжения (или деформации), то мы получим при граничных условиях нового типа прежнюю задачу — задачу Штурма—Лиувилля.

Введем в уравнение (9) переменную

$$z=p\frac{\partial y}{\partial x}. \tag{13}$$

Мы получим при этом:

$$\frac{1}{q}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{14}$$

Продифференцируем это уравнение по x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{q}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{p}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(p\frac{\partial y}{\partial x}\right),$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{q}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{1}{p}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Мы получили для z уравнение того же типа, что для y, но с другими входящими в него заданными функциями. Однако если p и q положительные функции, то $1/p$ и $1/q$ тоже положительны.

Как ведут себя при преобразовании к z граничные условия? Подставляя в (12) соотношения (13) и (14), получаем:

$$\left(\frac{M}{q}\frac{\partial z}{\partial x}+z\right)_l=0. \tag{15}$$

По отношению к z тип граничных условий — тот же самый, что был раньше по отношению к y: в (15) не входит вторая производная по t, подстановка $\varphi(x)\cos\sqrt{\lambda}\,t$ не приведет к появлению в граничных условиях параметра λ. Здесь получатся ортогональные собственные функции и будут иметь место все свойства, полученные раньше для y. Таким образом, имеется некоторого рода дуальность между задачей о величине y при граничных условиях типа (11) и задачей о величине z при граничных условиях типа (15).

Если на концах имеются и емкости и индуктивности (и пружины, и массы), задача не может быть сведена к уже рассмотренным, хотя перейти к этому случаю принципиально несложно. Часть доказанных нами теорем здесь неприменима. Здесь уже ни при каком выборе переменной собственные функции не будут ортогональны в обычном смысле, а будет иметь место только нагруженная ортогональность[1].

На этом мы закончим изложение основных отделов курса, хотя мы рассмотрели далеко не все вопросы, важные для физики и для техники. Перечислим некоторые из них. Мы не касались поведения распределенных систем с учетом затухания (при малом затухании частоты и формы колебаний изменяются мало) и применения теории возмущений к количественному расчету неоднородных

[1] [См. 8-ю лекцию части II.]

систем, обладающих малой неоднородностью. Мы не рассматривали также систем двух и трех измерений (колебания мембран и объемных тел различной формы), вынужденных колебаний распределенных систем и решений некоторых специальных задач, приводящих к специальным функциям. Наконец, мы не исследовали бегущих волн, т. е. вопросов распространения колебаний.

Остающееся у нас время я хотел бы посвятить вопросу о применении интегральных уравнений к колебаниям распределенных систем.

ОДИННАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(3/III 1932 г.)

Роль интегральных уравнений для физики. Функция Грина для струны или стержня; ее зависимость от граничных условий. Функция Грина в теории потенциала. Свойство симметрии функции Грина. Интегральное уравнение для динамической задачи о колебаниях струны или стержня. Симметризация ядра уравнения.

К вопросу о стоячих волнах возможен подход, отличный от того, которым мы пользовались. Этот подход не является обязательным, но имеет существенное значение. Речь идет о новой математической трактовке уже рассмотренных нами физических проблем.

Искомая функция, описывающая колебания распределенной системы, удовлетворяет не только некоторому дифференциальному уравнению, но и некоторому *интегральному* уравнению. Интегральные уравнения не имеют большого значения в качестве вычислительного аппарата. Их сила не в вычислительной стороне, а в физической.

В настоящее время нельзя серьезно заниматься колебаниями без знания интегральных уравнений. Литература по колебаниям пропитана интегральными уравнениями. В классической книге Куранта и Гильберта[1] половина вопросов рассматривается методом интегральных уравнений. Это — несколько формальная оценка их значения; можно привести и более существенные доводы.

---

[1] [Р. Курант и Д. Гильберт. Методы математической физики. М.—Л., 1951.]

Значение интегральных уравнений заключается в следующем.

Дифференциальное уравнение пишется, скажем, для струны или стержня *вообще*, а не для данного индивидуального случая. Для того чтобы охарактеризовать данную систему, нужно, кроме дифференциального уравнения, задать еще краевые условия. Между тем интегральное уравнение содержит в себе описание всего объекта. Интегральные уравнения для различных условий закрепления различны.

Далее, если взять, например, поперечные колебания стержня, то для них дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0.$$

Оно существенно отличается от дифференциального уравнения продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Возьмем двухмерные задачи. В случае мембраны получается дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, в случае пластинки — четвертого порядка. Но интегральные уравнения продольных и поперечных колебаний стержня принадлежат к одному типу. К одному типу принадлежат также интегральные уравнения мембраны и пластинки. Интегральные уравнения гораздо лучше отражают единство колебательных систем.

Есть такие физические задачи, которые прямо приводят к интегральному уравнению[1].

В наших колебательных задачах дело обстоит так. Известно из физики, что функция $y(x, t)$, которую мы хотим определить, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial y}{\partial x}\right) = q \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

и определенным краевым условиям. Можно показать математически, что функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению и краевым условиям, удовлетворяет определенному интегральному уравнению. Но есть и другой путь. Забудем о дифференциальных уравнениях. Можно так построить физическую задачу, что она непосредственно приводит к интегральному уравнению.

---

[1] [См. том I, стр. 229 и след.]

Дифференциальные уравнения — один из видов функциональных уравнений; они определяют функцию, если даны определенные дифференциальные соотношения. Интегральные уравнения — другой вид функциональных уравнений. Они определяют функцию, если дано интегральное соотношение, например, вида

$$y(x)=\int_a^b K(x,\ \xi)\,g(\xi)\,d\xi. \tag{1}$$

Здесь интеграл есть функция от x. Функции $K(x,\ \xi)$ и $y(x)$ даны, требуется найти функцию $g(\xi)$. Существует ряд физических задач, приводящих к соотношениям такого вида.

Заранее далеко не ясно, что уравнение типа (1) имеет решение, т. е. что существует удовлетворяющая ему функция $g(\xi)$. Поэтому одна из важнейших задач теории интегральных уравнений — выяснение того, существует ли решение.

Уравнение вида (1) называется интегральным уравнением с постоянными пределами. Часто мы приходим к другому типу интегрального уравнения:

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x,\ \xi)\,y(\xi)\,d\xi+f(x). \tag{2}$$

Здесь, в отличие от (1), искомая функция входит не только под знаком интеграла. Уравнение вида (2) называется интегральным уравнением второго рода или уравнением Фредгольма. Если

$$f(x)=0,$$

то мы получаем однородное интегральное уравнение второго рода. Функция $K(x,\ \xi)$ называется ядром интегрального уравнения.

Учение об интегральных уравнениях составляет обширную математическую дисциплину. Мы не будем стремиться к полноте и строгости. Постараемся прежде всего показать, как физические вопросы связываются с интегральными уравнениями. Я хочу при этом сразу дать представление и о собственных и о вынужденных колебаниях.

Результирующая сила, действующая на элемент dx стержня со стороны частей, расположенных слева и справа, равна

$$-p\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x+p\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx}.$$

В случае равновесия

$$-p\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x + p\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx} + g(x)\,dx = 0,$$

где $g(x)\,dx$ — внешняя сила, действующая на элемент dx. Для перехода к динамическим процессам можно воспользоваться принципом Даламбера.

В случае дискретной системы этот принцип говорит следующее. Пусть на i-тую точку действует результирующая сила X_i. При равновесии

$$X_i = 0.$$

Можно перейти к динамическому случаю, прибавив к X_i „силу инерции“ (название это — весьма неудачное) $-m\ddot{x}_i$ и рассуждая так же, как если бы система находилась в равновесии.

Мы можем аналогичным образом перейти от случая равновесия к случаю движения стержня, прибавив к объемной силе $g(x)\,dx$ „силу инерции“ $-q\,dx\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Мы получаем тогда уравнение

$$-q(x)\,dx\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - p\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x + p\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx} + g(x,\ t)\,dx = 0. \qquad (3)$$

В отсутствие внешней переменной силы оно совпадает с полученным ранее [1].

Пойдем дальше. Пусть внешняя сила — гармоническая:

$$g(x,\ t) = g(x)\cos\sqrt{\lambda}\,t.$$

Тогда можно удовлетворить уравнению (3) функцией y вида

$$y = \varphi(x)\cos\sqrt{\lambda}\,t.$$

При этом функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$g(x) + \frac{d}{dx}\left(p\,\frac{d\varphi}{dx}\right) + \lambda q\varphi = 0.$$

Нужно найти решение этого уравнения при заданных λ и $g(x)$. Если $g(x) = 0$, мы возвращаемся к задаче о собственных колебаниях.

Подчеркнем, что упругая сила определяется поведением системы в данной точке. Если дана деформация в данной точке, то этим определена и сила в этой точке, независимо от того, что происходит в других частях системы.

---

[1] [См. 1-ю лекцию части II.]

Будем теперь решать такую статическую задачу: задано распределение сил, требуется узнать отклонение различных точек. Отклонение в данной точке зависит от того, что происходит в других точках, т. е. перемещение данной точки зависит от *всех* сил, действующих на стержень; оно не является дифференциальным свойством.

Напишем уравнение равновесия

$$p\frac{d^2y}{dx^2} = -g(x), \tag{4}$$

где $g(x)$ — заданная функция. Оно еще не определяет, чему равно y в любой точке. Так, например, если концы свободны, то равновесия нет вовсе. Для того, чтобы y было определено, нужно задать граничные условия.

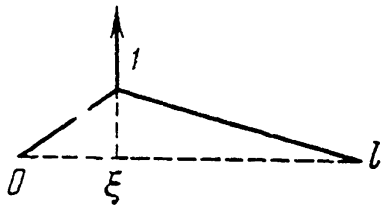


Рис. 176.

Прежде чем решать задачу о равновесии под действием силы $g(x)$, рассмотрим сначала другую, вспомогательную задачу.

Пусть сила действует на струну в одной точке $x=\xi$. Тогда при равновесии струна будет иметь форму, показанную на рис. 176. Величину силы положим равной единице. Теперь, когда сила сосредоточена в одной точке, имеется разрыв производной $\partial y/\partial x$. Слева действует, вследствие натяжения струны, сила

$$-p\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=\xi-0},$$

справа — сила

$$p\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=\xi+0}.$$

При равновесии сумма трех сил равна нулю:

$$-p\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=\xi-0} + p\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=\xi+0} + 1 = 0,$$

или

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{\xi+0} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{\xi-0} = -\frac{1}{p}. \tag{5}$$

Обозначим через $V(x, \xi)$ функцию $y(x)$ для рассматриваемого частного случая. Ее вид зависит от того, где приложена сила. Для $x \leqslant \xi$ имеем:

$$V(x, \xi) = a_1 x, \tag{6}$$

для $x \geqslant \xi$

$$V(x, \xi) = a_2(l - x). \tag{7}$$

Нужно удовлетворить двум условиям: условию непрерывности V в точке $x = \xi$:

$$a_1\xi = a_2(l - \xi),$$

и условию (5), которое после подстановки (6) и (7) принимает вид

$$a_2 + a_1 = \frac{1}{p}.$$

Получаются два очень простых уравнения для определения a_1 и a_2. Найдем из них a_1 и a_2 и подставим в (6) и (7). Это дает:

$$V(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{x(l-\xi)}{pl} & \text{для } x \leqslant \xi, \\ \dfrac{\xi(l-x)}{pl} & \text{для } x \geqslant \xi. \end{cases}$$

Наша математическая задача такова: найти непрерывную функцию $y(x)$, такую, что

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

во всех точках, кроме $x = \xi$, а производная $\frac{dy}{dx}$ непрерывна всюду, кроме точки $x = \xi$, где происходит скачок.

Функция удовлетворяет 1) граничным условиям, 2) дифференциальному уравнению и 3) в точке $x = \xi$ остается непрерывной, но ее производная терпит скачок заданной величины.

Такую функцию называют *функцией влияния* или *функцией Грина*, который применил подобную функцию для решения задач теории потенциала.

Если мы будем решать аналогичную задачу для стержня, мы получим совершенно то же самое. Но нас интересует другое. Будем рассматривать тот же стержень, но изменим граничные условия. Пусть один конец закреплен, а другой свободен (рис. 177). Теперь функция Грина будет другая. Левее точки приложения силы

$$V(x, \xi) = a_1\xi \qquad (x \leqslant \xi),$$

правее этой точки она изображается горизонтальной линией (рис. 178)

$$V(x, \xi) = b_1 \qquad (x \geqslant \xi).$$

Остается удовлетворить условию непрерывности $V(x, \xi)$, которое в данном случае имеет вид

$$a_1\xi = b,$$

и условию, определяющему величину разрыва (5) — в данном случае

$$a_1 = \frac{1}{p}.$$

Получается следующая функция Грина:

$$V(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{x}{p} & \text{для } x \leqslant \xi, \\ \dfrac{\xi}{p} & \text{для } x \geqslant \xi. \end{cases}$$

Таким образом, в функции Грина учтены граничные условия.

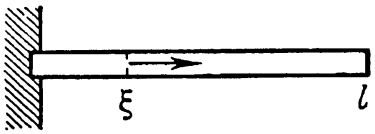


Рис. 177.

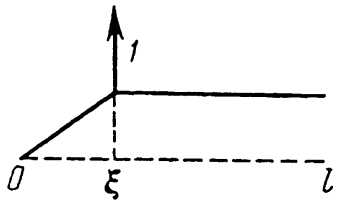


Рис. 178.

Но спрашивается, зачем исходить из фиктивной задачи о равновесии при силе, действующей в одной точке? Ведь нас интересует другая задача.

Дело в том, что мы рассматриваем *линейные* задачи и интересующая нас задача может быть сведена на ту, которую мы только что рассмотрели.

Пусть в точках

$$x = \xi_k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

действуют силы, равные g_k. Тогда на основании принципа суперпозиции смещение в точке x есть сумма смещений, которые вызывали бы в этой точке силы g_k, взятые в отдельности:

$$y(x) = \sum_k V(x, \xi_k)\, g_k. \tag{8}$$

Переход к непрерывно распределенной силе $g(x)$ (мы не гонимся за математической строгостью) дает:

$$y(x) = \int_0^l V(x, \xi)\, g(\xi)\, d\xi. \tag{9}$$

Таким образом, если удалось найти для рассматриваемой задачи функцию Грина, мы тотчас же можем написать выражение (9) для отклонения, вызываемого произвольно распределенной силой.

Функция Грина непрерывна, но ее первая производная претерпевает скачок. Именно наличие этого скачка дает возможность представить с ее помощью непрерывное решение интересующей нас задачи.

Поясним, как появляется функция Грина в теории потенциала.

Задача ставится так. Задано распределение потенциала φ на некоторой замкнутой поверхности (рис. 179) и, кроме того, задано распределение масс (или зарядов) $\rho(x, y, z)$. Потенциал удовлетворяет уравнению

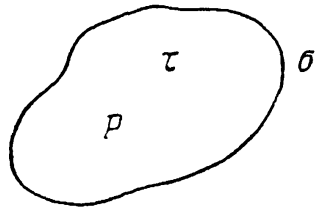


Рис. 179.

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

Требуется найти потенциал в любой точке.

Рассмотрим сначала случай, когда заряд сосредоточен в одной точке P. Соответствующий потенциал обозначим через g. Для функции g всюду, кроме точки P, где находится заряд, имеем:

$$\Delta g = 0.$$

Пусть далее на поверхности задано условие

$$g = 0.$$

Наконец, требуется, чтобы в точке P, где находится заряд, g обращалось в бесконечность, как $1/r$ (r — расстояние от точки P). Тогда, как можно показать,

$$\varphi = \int_\tau g\rho d\tau - \frac{1}{4\pi}\oint_\sigma \varphi \frac{\partial g}{\partial n} d\sigma,$$

где τ — объем внутри замкнутой поверхности σ.

Наше уравнение (4) есть, в сущности, лапласово уравнение в одном измерении. Требование обращения функции Грина в бесконечность типа $1/r$ в трехмерном случае переходит в двухмерном случае в требование обращения в бесконечность вида $\ln r$, а в одномерном случае — в требование скачка производной. Но во всех случаях функция Грина должна иметь особенность.

Функция вида (9) называется по-немецки quellenmässig dargestellte (представленной истокообразно), по-русски — порожденной данным ядром $V(x, \xi)$. Совершенно ясно, что класс функций,

порожденных определенным ядром, — это сравнительно узкий класс функций, гораздо более узкий, чем класс функций $g(x)$. Так, например, если $g(x)$ — разрывная функция, то $y(x)$ — непрерывная функция, и производная ее непрерывна. Существует ряд теорем относительно функций, порожденных ядром.

Уже сейчас мы имеем возможность поставить физическую задачу, непосредственно приводящую к интегральному уравнению.

Дано распределение отклонений. Как распределена сила? Эта задача приводит к интегральному уравнению первого рода

$$y(x)=\int_0^l V(x,\ \xi)\,g(\xi)\,d\xi \tag{10}$$

относительно неизвестной функции $g(\xi)$.

Интеграл, стоящий в правой части (10), является решением уравнения (4), удовлетворяющим краевым условиям задачи. Это легко проверить подстановкой.

Укажем на одно важное свойство функции $V(x, \xi)$. Для наших задач эта функция симметрична:

$$V(x,\ \xi)=V(\xi,\ x). \tag{11}$$

Покажем это на примере струны с закрепленными концами.

Пусть сначала

$$\xi=k,\ x=h,$$

причем $h<k$. Тогда

$$V(h,\ k)=\frac{(l-k)\,h}{pl}.$$

Пусть теперь

$$\xi=h,\quad x=k$$

(мы поменяли местами точки x и ξ). Тогда

$$V(k,\ h)=\frac{(l-h)\,k}{pl}.$$

Мы видим, что действительно имеет место симметрия, выражаемая формулой (11). Эта симметрия — очень глубокое свойство. В нем проявляется далеко идущий принцип взаимности, заключающийся в следующем.

Пусть одна и та же сила приложена один раз в точке A, другой раз в точке B. Во втором случае в точке A будет такое же отклонение, которое имеет место в первом случае в точке B. Можно точно указать, для какого класса систем имеет место принцип взаимности.

Перейдем теперь к нашей основной динамической задаче.

Для этого в уравнение (10) подставим вместо $g(\xi)$ по принципу Даламбера

$$g(\xi, t) - q(\xi)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{12}$$

Мы будем считать, что внешняя сила — гармоническая:

$$g(\xi, t) = g(\xi)\cos\sqrt{\lambda}t, \tag{13}$$

и будем искать решение в виде гармонического колебания

$$y = \varphi(x)\cos\sqrt{\lambda}t. \tag{14}$$

Подставляя (12) — (14) в (10), получаем:

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^l V(x, \xi)\, q(\xi)\varphi(\xi)\, d\xi + \int_0^l V(x, \xi)\, g(\xi)\, d\xi,$$

где $V(x, \xi)$ — функция Грина данной задачи.

Наша функция $\varphi(x)$ удовлетворяет, таким образом, уравнению

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^l V(x, \xi)\, q(\xi)\varphi(\xi)\, d\xi + f(x), \tag{15}$$

где

$$f(x) = \int_0^l V(x, \xi)\, g(\xi)\, d\xi. \tag{16}$$

Уравнение (15) является неоднородным интегральным уравнением второго рода.

Если внешняя сила отсутствует, т. е.

$$f(x) = 0,$$

то $\varphi(x)$ удовлетворяет однородному интегральному уравнению второго рода

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^l V(x, \xi)\, q(\xi)\varphi(\xi)\, d\xi. \tag{17}$$

В этом случае нас интересует, во-первых, спектр — совокупность значений λ, и, во-вторых, собственные функции $\varphi(x)$.

Ядро $V(x, \xi)q(\xi)$ несимметрично, но его очень легко симметризировать. Введем для этого вместо $\varphi(x)$ функцию

$$\psi(x) = \sqrt{q(x)}\,\varphi(x).$$

Умножив обе части однородного уравнения (17) на $\sqrt{q(x)}$, получаем уравнение

$$\psi(x)=\int_0^l V(x,\ \xi)\sqrt{q(x)\,q(\xi)}\,\psi(\xi)\,d\xi,$$

или, обозначив

$$K(x,\ \xi)=V(x,\ \xi)\sqrt{q(x)\,q(\xi)},$$

уравнение

$$\psi(x)=\int_0^l K(x,\ \xi)\,\psi(\xi)\,d\xi,$$

т. е. интегральное уравнение с симметричным ядром.

То, что можно симметризировать ядро с помощью множителя $\sqrt{q(x)}$, не случайно. Это связано с тем обстоятельством, что умножение на $\sqrt{q(x)}$ приводит от собственных функций φ_i, φ_k, удовлетворяющих условию

$$\int_0^l q(x)\,\varphi_i(x)\,\varphi_k(x)\,dx=0,$$

к ортогональным функциям ψ_i, ψ_k, для которых

$$\int_0^l \psi_i(x)\,\psi_k(x)\,dx=0.$$

ДВЕНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(9/III 1932 г.)

Невозможность построить функцию Грина в случае стержня со свободными концами. Предельный переход от задачи о колебаниях дискретной цепочки к интегральному уравнению колебаний стержня. Эквивалентность интегрального уравнения и дифференциальной схемы задачи Штурма — Лиувилля. Пример физической задачи другого типа, приводящей к интегральному уравнению: задача об идеальном оптическом изображении.

Если задана внешняя сила

$$g(x,\ t)=g(x)\cos\sqrt{\lambda}t \tag{1}$$

(λ здесь дано) и смещение стержня

$$y(x,\ t)=\varphi(x)\cos\sqrt{\lambda}t, \tag{2}$$

то, как мы видели, для $\varphi(x)$ получается интегральное уравнение

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^l V(x,\ \xi)\,q(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi+f(x), \tag{3}$$

где

$$f(x)=\int_0^l V(x,\ \xi)\,g(\xi)\,d\xi \tag{4}$$

— заданная функция x. Если нет внешней силы, интегральное уравнение принимает вид

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^l V(x,\ \xi)\,q(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Здесь λ должно быть определено из самого интегрального уравнения.

$V(x,\ \xi)$ — функция Грина нашей задачи. Функция $V(x,\ \xi)\,q(\xi)$ называется ядром интегрального уравнения. На основании физического смысла функции Грина ее часто называют функцией влияния.

Мы нашли $V(x,\ \xi)$ для двух частных случаев: для стержня с закрепленными концами и стержня с одним закрепленным концом. Если оба конца свободны, то функцию Грина построить нельзя. Это очень типичное и интересное обстоятельство. Постараемся его связать с уже известными нам свойствами.

Если стержень свободен, производная $\frac{\partial y}{\partial x}$ равна нулю на обоих концах. Кроме того, при равновесии $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ равно нулю всюду, кроме точки приложения силы. Таким образом, y должно быть постоянно на протяжении всего стержня, и нельзя удовлетворить условию скачка производной в точке приложения силы. Подчеркнем, что несуществование функции Грина связано не с дифференциальным уравнением, а с граничными условиями.

В случае свободных концов одно из собственных значений есть нуль. Уравнение

$$\varphi''+\lambda q\varphi=0$$

превращается при $\lambda=0$ в уравнение

$$\varphi''=0$$

с непрерывным решением

$$\varphi = \text{const}.$$

Если существует непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению и граничным условиям, то не существует удовлетворяющей ему разрывной функции. Наоборот, если не существует непрерывной функции, удовлетворяющей дифференциальному уравнению и граничным условиям, то существует разрывная.

Существование или несуществование функции Грина имеет ясный физический смысл. Если стержень свободен на обоих концах, то при действии на него силы не существует состояния равновесия. Физически этот случай является исключительным: стержень может не только колебаться, но и двигаться равномерно.

Однако для случая свободных концов можно построить функцию Грина в обобщенном смысле. Для этого, кроме единичной сосредоточенной силы, нужно приложить к стержню еще компенсирующую ее распределенную силу.

Можно рассматривать стержень как совокупность масс, соединенных „пружинами“ (довольно трудно ответить на вопрос: что лучше отражает — действительный стержень, сплошная или дискретная модель). Мы уже рассматривали предельный переход от дискретной модели к сплошной и показали, что решение, получаемое для дискретной системы, в пределе переходит в решение некоторого дифференциального уравнения в частных производных[1]. Интересно провести рассуждение так, чтобы от уравнений дискретной системы перейти к интегральному уравнению.

Возьмем „стержень“, закрепленный на одном конце и свободный на другом (рис. 180), и поставим сначала статическую задачу (здесь также можно перейти от статической задачи к динамической с помощью принципа Даламбера). Пусть на каждую точку действует некоторая сила. Обозначим через $\bar{g}_k$ силу, действующую на k-ую точку. Нужно определить смещения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ наших n частиц.

Рассмотрим сначала частный случай, когда внешняя сила, равная единице, действует только на k-ую частицу.

---

[1] [См. 32-ю лекцию части I и 1-ю лекцию части II.]

Пусть α — коэффициент упругости каждой пружины. Тогда результирующая упругая сила, действующая на i-ую частицу $(i \neq k)$, есть

$$\alpha(y_i - y_{i-1}) - \alpha(y_{i+1} - y_i)$$

(на все частицы, кроме k-ой, другие силы не действуют). При равновесии эта результирующая сила равна нулю, т. е.

$$-y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1} = 0$$

Напишем уравнение для первой частицы:

$$y_1 - y_2 = 0$$

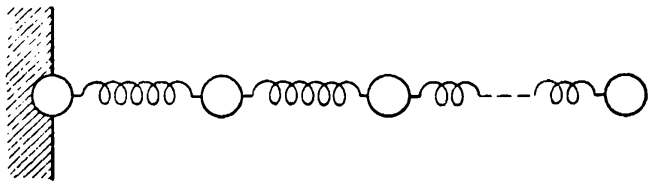


Рис. 180.

и для последней:

$$y_n - y_{n-1} = 0.$$

Нужно еще написать уравнение для k-ой частицы. Здесь результирующая упругая сила уравновешивается внешней силой, равной единице, т. е.

$$-y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1} = \frac{1}{\alpha}.$$

Для $i \leqslant k$ смещения y_i образуют арифметическую прогрессию:

$$y_i = ir \qquad (i \leqslant k).$$

Все частицы с $i \geqslant k$ имеют одинаковое смещение. Так как цепочка не имеет разрыва, то

$$y_i = kr \qquad (i \geqslant k).$$

Не трудно определить, что $r = 1/\alpha$. Таким образом, значения y_i $(i = 1, 2, \ldots)$ являются функциями номера i и номера k той частицы, к которой приложена сила, а именно:

$$V_{ik} = \begin{cases} \frac{i}{\alpha} & (i \leqslant k), \\ \frac{k}{\alpha} & (i \geqslant k). \end{cases}$$

Если сила равна не единице, а $\bar{g}$, то y_i просто умножается на $\bar{g}$. Если теперь силы действуют на все точки и $\bar{g}_k$ — сила, приложенная к k-ой точке, то

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} V_{ik}\bar{g}_k.$$

Если

$$\bar{g}_i = g_i \cos\sqrt{\lambda}t,$$

$$y_i = \varphi_i \cos\sqrt{\lambda}t,$$

то, применяя принцип Даламбера, получаем окончательно для динамической задачи:

$$\varphi_i = \lambda \sum_k V_{ik} m_k \varphi_k + \sum_k V_{ik} g_k. \tag{5}$$

Здесь уместно поставить вопрос о том, как поступить, если мы хотим вычислить период колебаний распределенной системы, апроксимируя ее посредством дискретной системы. Подход, основанный на дифференциальных уравнениях, проще. Имея в виду только простоту, можно было бы не переходить к анализу посредством интегральных уравнений.

Для перехода от (5) к интегральному уравнению напишем

$$\alpha = \frac{p}{a},$$

где p — макроскопический модуль упругости, a — длина отдельной „пружины“. Тогда

$$V_{ik} = \begin{cases} \dfrac{ai}{\alpha a} & (i \leqslant k), \\ \dfrac{ak}{\alpha a} & (i \geqslant k). \end{cases}$$

Пусть теперь $ia = x$, причем

$$a \to 0, \quad i \to \infty,$$

и, кроме того,

$$\frac{m_k}{a} = q(\xi), \quad a = \Delta\xi.$$

Мы получаем в пределе

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^l V(x, \xi) q(\xi) \varphi(\xi)\, d\xi + \int_0^l V(x, \xi) g(\xi)\, d\xi.$$

Итак, исходя из дискретной модели и перейдя к пределу (мы не вдаемся в вопрос о законности перехода), мы снова получили интегральное уравнение (3). Интегральное уравнение устанавливается на основании физической картины явления так же хорошо, как и дифференциальное.

Пусть дана краевая задача, которая формулируется на языке дифференциальных уравнений следующим образом:

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi}{dx}\right)+\lambda q\varphi=-g(x), \tag{6}$$

$$\left(\alpha_1\varphi-\alpha_2\frac{d\varphi}{dx}\right)_0=0, \tag{7}$$

$$\left(\beta_1\varphi+\beta_2\frac{d\varphi}{dx}\right)_l=0 \tag{8}$$

(общие граничные условия Штурма—Лиувилля). Для нее существуют определенные собственные числа и собственные функции. Можно доказать, что все собственные функции и собственные числа краевой задачи удовлетворяют интегральному уравнению для той же задачи, и наоборот. Совокупность собственных чисел и собственных функций в обеих задачах одинакова.

Разумеется, то, что мы из физики получили для обоих случаев обе картины, в значительной степени предрешает этот результат, но мы постараемся его теперь доказать. Мы докажем, что решения интегрального уравнения (3) удовлетворяют дифференциальному уравнению (6) при краевых условиях (7) и (8), и наоборот.

Функция $V(x, \xi)$ непрерывна и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dV}{dx}\right)=0. \tag{9}$$

Ее производная непрерывна всюду, кроме точки $x=\xi$, где она претерпевает скачок

$$V'(x, \xi)_{x=\xi-0}-V'(x, \xi)_{x=\xi+0}=\frac{1}{p}.$$

Уравнение (9) можно проинтегрировать в квадратурах. Мы найдем одно решение для левой части системы ($x<\xi$), другое — для правой ($x>\xi$). Обозначим эти решения соответственно через ρ и σ. Имеем:

$$\frac{d}{dx}(p\rho')=0, \quad \frac{d}{dx}(p\sigma')=0,$$

откуда

$$\frac{d}{dx}[p(\sigma\rho' - \rho\sigma')] = 0,$$

или, интегрируя,

$$p(\sigma\rho' - \rho\sigma') = \text{const}.$$

Для случая, когда λ не есть собственное значение, всегда можно построить функцию Грина из следующих соображений: ρ и σ выбраны так, чтобы ρ удовлетворяло краевому условию (7), а σ — краевому условию (8). При этом ρ и σ линейно независимы $(\sigma\rho' - \rho\sigma' \neq 0)$ и при подходящей нормировке

$$p(\sigma\rho' - \rho\sigma') = 1.$$

Возьмем теперь

$$V(x, \xi) = \rho(x)\sigma(\xi) \qquad (0 \leqslant x \leqslant \xi), \tag{10}$$

$$V(x, \xi) = \rho(\xi)\sigma(x) \qquad (\xi \leqslant x \leqslant l) \tag{11}$$

и проверим, что построенная таким способом функция $V(x, \xi)$ удовлетворяет всем поставленным условиям.

Имеем, дифференцируя (10) и (11) по x:

$$V'(x, \xi)_{x=\xi-0} = \rho'\sigma,$$

$$V'(x, \xi)_{x=\xi+0} = \rho\sigma'$$

и, следовательно,

$$V'(x, \xi)_{x=\xi-0} - V'(x, \xi)_{x=\xi+0} = \frac{1}{p}. \tag{12}$$

Я утверждаю, что составленное с таким $V(x, \xi)$ интегральное уравнение эквивалентно дифференциальной схеме (6) — (8). Можно показать обычным способом, что функция $V(x, \xi)$ — единственная функция, удовлетворяющая всем поставленным условиям.

Покажем, что функция φ, удовлетворяющая дифференциальному уравнению и краевым условиям, удовлетворяет и найденному интегральному уравнению.

Имеем:

$$\frac{d}{dx}(p\varphi') = -\lambda q\varphi - g(x); \tag{13}$$

$$\frac{d}{dx}(pV') = 0. \tag{14}$$

Умножив (13) на V, (14) — на φ и вычитая, мы получаем:

$$\frac{d}{dx}[p(\varphi' V - V'\varphi)] = -\lambda V q \varphi - V g.$$

Будем теперь интегрировать по x в интервале $(0, l)$. Так как при этом нужно учитывать разрывность V', мы разделим интервал $(0, l)$ на интервалы $(0, \xi)$ и (ξ, l) и будем интегрировать отдельно по каждому интервалу:

$$p(\varphi' V - V'\varphi)\Big|_0^{\xi-0} = -\lambda \int_0^{\xi-0} V q \varphi dx - \int_0^{\xi-0} V g dx; \tag{15}$$

$$p(\varphi' V - V'\varphi)\Big|_{\xi+0}^{l} = -\lambda \int_{\xi+0}^{l} V q \varphi dx - \int_{\xi+0}^{l} V g dx. \tag{16}$$

Левые части обращаются в нуль соответственно при $x=0$, $x=l$, так что после сложения (15) и (16) остается:

$$-p\varphi(\xi)[V'_{\xi-0} - V'_{\xi+0}] = -\lambda \int_0^l V(x, \xi), q(x)\varphi(x) dx - \int_0^l V(x, \xi) g(x) dx.$$

Учитывая (12), получаем далее:

$$\varphi(\xi) = \lambda \int_0^l V(x, \xi) q(x) \varphi(x) dx + \int_0^l V(x, \xi) g(x) dx,$$

откуда, после замены x на ξ и ξ на x, следует уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^l V(\xi, x) q(\xi) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^l V(\xi, x) g(\xi) d\xi. \tag{17}$$

Это уравнение отличается от (3) лишь тем, что вместо $V(x, \xi)$ стоит $V(\xi, x)$, но так как функция Грина симметрична:

$$V(x, \xi) = V(\xi, x)$$

(и это здесь существенно), уравнение (17) совпадает с (3).

Итак, мы убедились, что всякая функция, удовлетворяющая схеме (6) — (8), одновременно удовлетворяет и интегральному уравнению (3). Можно также путем простого дифференцирования показать и обратное.

Дифференциальная схема нашей задачи эквивалентна интегральному уравнению с функцией Грина, определенной выше. В этой эквивалентности заключается, с одной стороны, интерес, который представляют интегральные уравнения, с другой стороны, — их слабость, если бы дело этим ограничивалось.

Из того, что было сказано, следует, что интегральное уравнение (3) имеет бесконечное множество собственных значений и каждому собственному значению соответствует одна собственная функция.

Мы вывели интегральное уравнение, соответствующее определенному узкому классу дифференциальных уравнений. Вид ядра связан определенным образом с задачей Штурма—Лиувилля. Для специального типа интегральных уравнений, ядра которых соответствуют дифференциальной схеме (6)—(8), мы доказали некоторые свойства собственных чисел и собственных функций. Однако необходима более общая теория, пригодная при любом ядре. Такая теория существует. Теория интегральных уравнений гораздо шире, чем проблема Штурма—Лиувилля. Ряд вопросов (например, вопрос о разложимости функций по собственным функциям) легче, проще и изящнее решается с помощью интегральных уравнений. Даже ради одного этого стоит их изучить.

Мне хочется изложить задачу, где ссылка на дифференциальные уравнения не поможет. Мы получим в ней интегральное уравнение другого типа, чем (3). Эта задача относится к теории оптического изображения[1].

Пусть имеется система линз, дающая изображение (рис. 181). Каждой точке объекта соответствует определенная точка изображения. Предположим, что система не дает увеличения (или уменьшения). Согласно геометрической оптике яркость в точке M определяет освещенность в точке M'. Но в действительности геометрическая оптика несправедлива. Вследствие диффракции каждой точке предмета соответствует в плоскости изображения некоторое распределение интенсивности. Максимум находится в точке, где было бы изображение согласно геометрической оптике, но с удалением от этой точки интенсивность спадает постепенно.

Пусть одна точка предмета дает в плоскости изображения распределение амплитуды

$$K(x, \xi)$$

[1] [Ср. том I, стр. 229.]

(амплитуда есть функция координаты точки объекта ξ и координаты точки изображения x). Если диафрагма имеет вид щели, то

$$K(x, \xi) = \frac{\sin c\,(x-\xi)}{x-\xi},$$

где

$$c = \frac{2\pi d}{Lf}$$

(d — половина ширины щели; L — длина волны; f — фокусное расстояние). Если точка объекта перемещается, то перемещается вся картина; поэтому $K(x, \xi)$ есть функция от $x-\xi$.

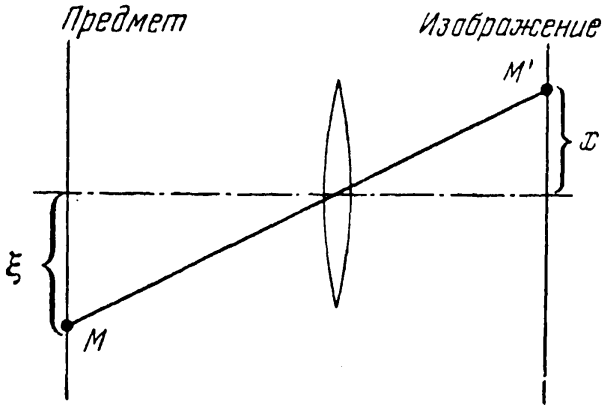


Рис. 181.

Амплитуда в точке x от элемента предмета длины $d\xi$ есть

$$z(\xi)K(x, \xi)\,d\xi,$$

где $z(\xi)$ характеризует распределение амплитуды по предмету. Картины от отдельных элементов предмета накладываются, и результирующая амплитуда в плоскости наблюдения имеет распределение

$$A(x) = \int_a^b K(x, \xi)\,z(\xi)\,d\xi \qquad (18)$$

(здесь предполагается, что предмет освещен так, что отдельные его элементы посылают когерентные колебания).

Конечно, распределение $A(x)$, вообще говоря, не подобно распределению $z(\xi)$. Они только связаны между собой соотношением (18). Вообще говоря, при изображении предмет искажается, распределение света в изображении иное, чем в предмете. Возникают вопросы: как нужно строить оптический прибор для того, чтобы искажение было возможно меньше? Существуют ли такие предметы, которые не искажаются заданной оптической системой?

Если бы оказалось, что существуют такие функции $z(x)$, для которых

$$A(x) = \frac{1}{\lambda} z(x), \qquad (19)$$

где λ — постоянная, то это означало бы, что распределения вида $z(x)$ не искажаются.

Подставляя (19) в (18), получаем:

$$z(x)=\lambda\int_a^b K(x,\ \xi)\,z(\xi)\,d\xi. \tag{20}$$

Неискажаемые структуры должны удовлетворять интегральному уравнению (20), ядро которого задано свойствами оптической системы.

Ядро уравнения (20) симметрично, но оно совсем другого типа, чем в задаче Штурма—Лиувилля. Оно не имеет разрыва производной.

Существует ли структура, удовлетворяющая уравнению (20)?

К сожалению, ответ неутешителен. Интегральное уравнение (20) имеет решения, но эти решения — бесконечные синусоиды. Только такие распределения изображаются точно. Таким образом, решение существует, но физически оно мало интересно.

Но можно поставить вопрос иначе: насколько можно приблизиться к точному изображению? Оказывается, можно указать такие структуры, которые мало искажаются. Можно высказать на этот счет ряд общих теорем.

Таким образом, области дифференциальных и интегральных уравнений далеко не перекрываются. Интегральные уравнения представляют интерес и независимо от дифференциальных уравнений.

ТРИНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(13/III 1932 г.)

Дополнительные замечания по теории интегральных уравнений. Вопрос о возможности разложения произвольной функции, удовлетворяющей краевым условиям, по собственным функциям краевой задачи.

Мы видели, что функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению и граничным условиям задачи Штурма—Лиувилля, удовлетворяет также определенному интегральному уравнению. Это верно также, если положить $\lambda=0$; мы имеем в этом случае статическую задачу, решением которой является функция

$$\varphi(x)=\int_0^l V(x,\ \xi)\,g(\xi)\,d\xi.$$

Более общий класс интегральных уравнений получится, если не ограничивать функцию $V(x, \xi)$ тем условием, что она есть функция Грина некоторой задачи.

Мы займемся однородным интегральным уравнением, т. е. положим:

$$g(\xi)=0,$$

и приведем ядро к симметричному виду, вводя функцию

$$\psi(x)=\sqrt{q(x)}\,\varphi(x).$$

Новое симметричное ядро мы обозначим через $K(x, \xi)$, т. е.

$$K(x, \xi)=V(x, \xi)\sqrt{q(x)\,q(\xi)}.$$

Новое уравнение запишется так:

$$\psi(x)=\lambda\int_0^l K(x, \xi)\,\psi(\xi)\,d\xi. \tag{1}$$

Мы знаем, что если ядро построено указанным способом из функции Грина, то интегральное уравнение обладает бесконечным множеством собственных значений и собственных функций. Существует теорема, которую мы примем без доказательства: всякое интегральное уравнение с *симметричным* ядром обладает по крайней мере одним собственным значением и соответствующей собственной функцией. В случае несимметричного ядра может оказаться, что интегральное уравнение не имеет ни одного решения.

Рассмотрим пример Ковалевского. Пусть ядро симметрично и имеет вид

$$K(x, \xi)=\sin\pi x\sin\pi\xi.$$

Пусть, кроме того, $l=1$. Тогда уравнение будет

$$\psi(x)=\lambda\int_0^1 \sin\pi x\sin\pi\xi\,\psi(\xi)\,d\xi.$$

Такое ядро, которое можно представить как произведение вида

$$f_1(x) f_2(\xi)$$

называется *вырожденным*. В нашем примере ядро вырождено и

$$\psi(x) = \lambda \sin \pi x \int_0^1 \psi(\xi) \sin \pi \xi d\xi = c\lambda \sin \pi x,$$

где c — постоянная.

Подставляя это выражение для ψ в интегральное уравнение, находим:

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^1 \sin^2 \pi \xi d\xi = \frac{1}{2},$$

откуда следует, что $\lambda = 2$.

Возьмем теперь несимметричное ядро

$$K(x, \xi) = \sin \pi x \cos \pi \xi.$$

Повторяя прежнее вычисление, находим:

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^1 \sin \pi \xi \cos \pi \xi d\xi = 0.$$

Таким образом, уравнение не имеет собственного значения и единственное решение — тривиальное:

$$\psi = 0.$$

Пусть в рассматриваемой задаче имеется не меньше двух собственных значений. Тогда

$$\psi_m(x) = \lambda_m \int_0^l K(x, \xi)\, \psi_m(\xi)\, d\xi, \tag{2}$$

$$\psi_n(x) = \lambda_n \int_0^l K(x, \xi) \psi_n(\xi)\, d\xi, \tag{3}$$

причем $\lambda_m \neq \lambda_n$. Покажем, что если ядро симметрично, то функции

ψ_m и ψ_n ортогональны. Умножая (2) на $\lambda_n\psi_n$, а (3) — на $\lambda_m\psi_m$, вычитая и интегрируя по x от 0 до l, находим:

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^l \psi_m(x)\psi_n(x)\,dx =$$

$$= \lambda_m\lambda_n \int_0^l\int_0^l K(x, \xi)[\psi_m(\xi)\psi_n(x) - \psi_m(x)\psi_n(\xi)]\,d\xi dx.$$

Меняя в последнем члене x и ξ местами, получим при симметричном ядре:

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^l \psi_m(x)\psi_n(x)\,dx = 0,$$

т. е. функции ψ_m и ψ_n ортогональны. Ясно, что это условие ортогональности совпадает с ранее выведенным для функций φ:

$$\int_0^l q(x)\varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = 0.$$

В задаче Штурма—Лиувилля каждому собственному значению соответствует одна и только одна собственная функция. В общем случае в интегральном уравнении данному собственному значению могут соответствовать n линейно независимых собственных функций (например, в случае мембран и пластин). Ясно, что наше доказательство ортогональности не годится для функций, соответствующих одному и тому же собственному значению. Вообще говоря, различные собственные функции, соответствующие одному и тому же собственному значению, не ортогональны, но так как они линейно независимы, систему этих функций всегда можно ортогонализировать. Легко убедиться в этом на примере функций ψ_1 и ψ_2. Пусть они не ортогональны. Можно всегда выбрать постоянные a и b так, чтобы функции

$$\bar{\psi}_1 = a_1\psi_1 + b_1\psi_2,$$

$$\bar{\psi}_2 = a_2\psi_1 + b_2\psi_2$$

были ортогональны и нормированы, т. е. чтобы было

$$\int_0^l \bar{\psi}_1^2(x)\,dx = 1, \quad \int_0^l \bar{\psi}_2^2(x)\,dx = 1, \quad \int_0^l \bar{\psi}_1(x)\bar{\psi}_2(x)\,dx = 0.$$

Поэтому мы всегда будем считать, что система фундаментальных функций ортогональна и нормирована. В общем случае ограниченного симметричного ядра одному собственному значению может соответствовать больше одной собственной функции, но число их при этом всегда конечное.

Мы знаем, что общее решение в случае струны имеет вид

$$y(x, t)=\sum_i \varphi_i(x)\left(A_i \cos \sqrt{\lambda_i} t+B_i \sin \sqrt{\lambda_i} t\right).$$

Оно представляет собою сумму всех возможных колебаний. Если даны начальные распределения смещений и скоростей, то колебание определено условиями:

$$y(x, 0)=\sum_i A_i \varphi_i(x)=f(x),$$

$$\frac{\partial y(x, 0)}{\partial t}=\sum_i B_i \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(x)=F(x).$$

Если функции $f(x)$ и $F(x)$ могут быть разложены в ряды по собственным функциям задачи, то коэффициенты разложения дают амплитуды колебаний. Следовательно, вопрос заключается в возможности разложения любой функции в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям задачи. Докажем, что это всегда возможно. Мы будем оперировать с функциями ψ_i, так как разложение можно умножить на $\sqrt{q(x)}$:

$$\sum_i A_i \psi_i(x)=f(x) \sqrt{q(x)}; \tag{4}$$

$$\sum_i B_i \sqrt{\lambda_i} \psi_i(x)=F(x) \sqrt{q(x)}. \tag{5}$$

Пусть ядро симметричное. Мы выберем некоторую специальную функцию и допустим, что ее можно разложить в ряд по собственным функциям. Мы покажем, что в таком случае можно разложить в ряд по собственным функциям также произвольную функцию. В качестве специальной функции мы возьмем ядро интегрального уравнения

$$K(x, \xi)=c_1 \psi_1(x)+c_2 \psi_2(x)+\ldots \tag{6}$$

Так как по предположению ряд сходится равномерно, то его можно интегрировать почленно:

$$\int_0^l K(x, \xi)\psi_k(x)\,dx = \int_0^l \psi_k(x)[c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) + \ldots].$$

В силу ортогональности собственных функций разного номера и условия нормировки

$$\int_0^l \psi_k^2(x)\,dx = 1,$$

имеем:

$$c_k = \int_0^l K(x, \xi)\psi_k(x)\,dx.$$

Но из интегрального уравнения видно, что интеграл равен

$$\frac{\psi_k(\xi)}{\lambda_k}.$$

Следовательно,

$$c_k = \frac{\psi_k(\xi)}{\lambda_k}$$

и

$$K(x, \xi) = \frac{\psi_1(x)\psi_1(\xi)}{\lambda_1} + \frac{\psi_2(x)\psi_2(\xi)}{\lambda_2} + \ldots \tag{7}$$

Выражение в правой части называется билинейной формой нашего интегрального уравнения. Докажем, что если она сходится равномерно, то она непременно представляет ядро. (Мы только *предположили*, а не доказали, что ряд (6) сходится равномерно. Вообще, нельзя доказать, что *всякое* ядро может быть разложено таким образом.)

Образуем разность

$$g(x, \xi) = K(x, \xi) - \sum_i \frac{\psi_i(x)\psi_i(\xi)}{\lambda_i}.$$

Ясно, что $g(x, \xi)$ есть непрерывная и симметричная функция x и ξ. Следовательно, если мы образуем однородное интегральное уравнение с ядром $g(x, \xi)$, то это уравнение обладает по крайней мере одним собственным значением и одним нетривиальным решением:

$$\chi(x) = \mu \int_0^l g(x, \xi)\chi(\xi)\,d\xi. \tag{8}$$

Покажем, что решение этого уравнения $\chi(x)$ ортогонально ко всем функциям $\psi_k(x)$.

Умножая уравнение (8) на $\psi_k(x)$ и интегрируя, получаем:

$$\int_0^l \psi_k(x)\chi(x)\,dx = \mu\int_0^l \chi(\xi)\left[\int_0^l K(x,\xi)\psi_k(x)\,dx - \right.$$

$$\left. - \int_0^l \sum_i \frac{\psi_i(x)\psi_i(\xi)}{\lambda_i}\psi_k(x)\,dx\right] d\xi.$$

Изменив порядок суммирования и интегрирования в последнем члене (это можно сделать, так как ряд сходится равномерно), мы получаем в силу ортогональности ψ_i и ψ_k $(i \neq k)$, что он равен

$$\frac{\psi_k(\xi)}{\lambda_k}.$$

Но первый член в силу исходного интегрального уравнения тоже равен

$$\frac{\psi_k(\xi)}{\lambda_k}.$$

Значит,

$$\int_0^l \psi_k(x)\chi(x)\,dx = 0,$$

т. е. функция $\chi(x)$ ортогональна ко всем функциям $\psi_i(x)$.

Покажем теперь, что функция $\chi(x)$ является собственной функцией исходного интегрального уравнения, образованного с помощью ядра $K(x, \xi)$.

Действительно,

$$\chi(x) = \mu\int_0^l g(x,\xi)\chi(\xi)\,d\xi =$$

$$= \mu\int_0^l K(x,\xi)\chi(\xi)\,d\xi - \mu\int_0^l \sum_i \frac{\psi_i(x)\psi_i(\xi)}{\lambda_i}\chi(\xi)\,d\xi.$$

Но в силу ортогональности $\chi(x)$ ко всем $\psi_i(x)$, последний интеграл есть нуль. Следовательно, $\chi(x)$ действительно есть собственная функция ядра $K(x, \xi)$.

Но тогда $\chi(x)$ есть одна из функций $\psi_i(x)$. Так как она ортогональна ко всем $\psi_i(x)$, то она ортогональна к самой себе, и мы

пришли к противоречию. Следовательно, уравнение (8) не имеет собственной функции, а это возможно только, если

$$g(x, \xi)=0,$$

т. е.

$$K(x, \xi)=\sum_i \frac{\psi_i(x)\,\psi_i(\xi)}{\lambda_i}. \tag{9}$$

Докажем теперь, что если ядро может быть представлено билинейной формой в согласии с уравнением (9), то всякая функция, порождаемая ядром, т. е. всякая функция $f(x)$, которая может быть представлена в виде

$$f(x)=\int_0^l K(x, \xi)\,h(\xi)\,d\xi,$$

может быть разложена в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям ядра.

Действительно, умножая (9) на $h(\xi)$ и интегрируя, получаем

$$f(x)=\int_0^l K(x, \xi)\,h(\xi)\,d\xi=\int_0^l \sum_i \frac{\psi_i(x)\,\psi_i(\xi)}{\lambda_i}\,h(\xi)\,d\xi.$$

Если функция $h(\xi)$ — ограниченная, то ряд, стоящий справа, равномерно сходится, и, следовательно,

$$f(x)=\sum_i \psi_i(x)\int_0^l \frac{\psi_i(\xi)\,h(\xi)}{\lambda_i}\,d\xi,$$

или

$$f(x)=\sum_i c_i\psi_i(x),$$

где

$$c_i=\int_0^l \frac{\psi_i(\xi)\,h(\xi)}{\lambda_i}\,d\xi.$$

Таким образом, функция $f(x)$ действительно может быть разложена в равномерно сходящийся ряд по функциям $\psi_i(x)$.

ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(19/III 1932 г.)

Краткое резюме содержания предыдущей лекции. Вопрос об апроксимации функции конечным числом членов ряда. Полнота системы собственных функций. Вопрос об условиях разложимости и быстроте сходимости ряда. Распределение амплитуд гармоник в зависимости от начальных условий. Пример струны, возбуждаемой щипком и ударом. Электрический аналог возбуждения ударом. Влияние ширины интервала возбуждения при ударе.

В прошлых лекциях мы рассмотрели вопрос о собственных колебаниях. Перед нами возник вопрос о том, как приспособить решение к начальным условиям. Дело сводится к тому, чтобы разложить заданную функцию, удовлетворяющую краевым условиям, в ряд по собственным функциям. Доказательство разложимости можно провести с помощью интегральных уравнений, пользуясь тем, что собственные функции удовлетворяют интегральному уравнению.

Мы показали, что можно разложить в ряд по фундаментальным функциям всякую функцию, „достижимую с помощью ядра“. Какие физические указания дает это решение?

Мы доказали, что если ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(x)\,\psi_i(\xi)}{\lambda_i} \tag{1}$$

сходится равномерно, то он представляет собой ядро интегрального уравнения $K(x, \xi)$:

$$K(x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(x)\,\psi_i(\xi)}{\lambda_i}.$$

Часто непосредственно видно, что ряд (1) сходится.

Если функция $f(x)$ достижима с помощью ядра, т. е.

$$f(x) = \int_0^l K(x, \xi)\, h(\xi)\, d\xi, \tag{2}$$

то

$$f(x) = \sum_i c_i \psi_i(x), \tag{3}$$

причем

$$c_i = \frac{1}{\lambda_i} \int_0^l h(\xi)\, \psi_i(\xi)\, d\xi. \tag{4}$$

Подчеркнем лишний раз, что не всякая функция может быть представлена в виде (3), а только достижимая с помощью ядра.

Представляет ли интерес то, что мы доказали? Это зависит от того, насколько обширен класс функций, достижимых с помощью ядра, а это в свою очередь зависит от вида ядра. Если $K(x, \xi)$ — ядро штурм-лиувиллевского типа, то всякая непрерывная функция с непрерывной первой производной и кусочно-непрерывной второй производной, удовлетворяющая, кроме того, краевым условиям данной задачи Штурма—Лиувилля, может быть разложена в ряд по собственным функциям ядра.

Формула (4) несколько неудобна тем, что выражает коэффициенты c_i через функцию $h(\xi)$. Приведем эту формулу к другому, более удобному виду. Умножим (2) на $\psi_i(x)$ и проинтегрируем:

$$\int_0^l f(x)\psi_i(x)\,dx = \int_0^l \int_0^l K(x, \xi)\psi_i(x)h(\xi)\,dx\,d\xi.$$

Но

$$\int_0^l K(x, \xi)\psi_i(x)\,dx = \frac{\psi_i(\xi)}{\lambda_i}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^l f(x)\psi_i(x)\,dx = \frac{1}{\lambda_i}\int_0^l \psi_i(\xi)h(\xi)\,d\xi,$$

т. е.

$$c_i = \int_0^l f(x)\psi_i(x)\,dx. \tag{5}$$

Теперь коэффициенты разложения выражены непосредственно через функцию $f(x)$. Они вычисляются так же, как коэффициенты обычного ряда Фурье, и их принято и в этом более общем случае называть коэффициентами Фурье нашей функции.

Напомним, что функции $\psi_i(x)$ отличны от функций $\varphi_i(x)$, непосредственно описывающих форму колебания. Между φ_i и ψ_i имеет место соотношение

$$\psi_i(x) = \sqrt{q(x)}\,\varphi_i(x). \tag{6}$$

Общее решение нашей задачи имеет вид

$$y(x, t) = \sum_i \varphi_i(x)(A_i \cos \sqrt{\lambda_i} t + B_i \sin \sqrt{\lambda_i} t), \tag{7}$$

причем начальные условия даются соотношениями:

$$y(x, 0) = \sum_i A_i \varphi_i(x) = f(x); \tag{8}$$

$$\frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = \sum_i B_i \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(x) = F(x). \tag{9}$$

Умножив (8) на $\sqrt{q(x)}$, получаем:

$$\sum_i A_i \psi_i(x) = \sqrt{q(x)}\, f(x),$$

откуда

$$A_i = \int_0^l \sqrt{q(x)}\, f(x)\, \psi_i(x)\, dx.$$

Подставляя сюда (6), получаем:

$$A_i = \int_0^l q(x) f(x) \varphi_i(x)\, dx,$$

т. е. коэффициенты разложения $f(x)$ по функциям φ_i совпадают с коэффициентами разложения функции $\sqrt{q(x)}\, f(x)$ по функциям ψ_i.

Я хотел бы упомянуть еще о другом подходе к задаче. Практически всегда приходится ограничиваться конечным числом членов ряда (7). Возникает вопрос: можно ли и с какой степенью точности апроксимировать функцию $f(x)$ *конечным* числом членов ряда, т. е. суммой

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i(x). \tag{10}$$

Нужно определить, что мы будем понимать под хорошей апроксимацией.

Для нас важна не апроксимация при каких-нибудь отдельных значениях x, а апроксимация *в среднем* на всем интервале. Поэтому

мы будем считать апроксимацию тем лучшей, чем меньше средняя квадратичная ошибка:

$$J=\frac{1}{l}\int_0^l\left[f(x)-\sum_i c_i\psi_i(x)\right]^2 dx. \tag{11}$$

Пусть, например, $n=3$. Тогда задача о наилучшей апроксимации — это задача об отыскании минимума функции (11) от трех неизвестных: c_1, c_2 и c_3.

Оказывается — и это является замечательным фактом, что при любом n для того, чтобы J было минимальным, нужно подобрать c_i так, чтобы они совпадали с коэффициентами разложения в бесконечном ряде (8). Это свойство связано с ортогональностью функций ψ_i.

Если окажется, что при некотором $n=n_1$ апроксимация, достигаемая таким выбором c_i, недостаточна, то мы присоединим еще несколько членов. При этом коэффициенты первых членов не придется вычислять заново. Вообще говоря, при апроксимации функции рядом дело обстоит не так: при добавлении дальнейших членов приходится изменять коэффициенты первых членов разложения.

Вследствие ортогональности собственных функций формула (11) приводится к виду

$$J=\frac{1}{l}\left(\int_0^l f^2(x)\,dx-\sum_{i=1}^n c_i^2\right),$$

откуда сразу видно, что чем больше взято членов суммы (10), тем лучше приближение.

Из того, что мы доказали, непосредственно следует, что при $n\to\infty$ ошибка (11) стремится к нулю.

Если ряд

$$\sum_i c_i\psi_i$$

сходится равномерно, то в пределе

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2=\int_0^l f^2(x)\,dx,$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty} J=0.$$

Если имеет место это последнее условие, то говорят, что функции ψ_i, с помощью которых составляются коэффициенты разложения, образуют *полную* систему функций. Полнота системы собственных функций задачи Штурма—Лиувилля и других краевых задач, встречающихся, например, в волновой механике, является исключительно важным свойством.

Без доказательства сходимости билинейной формы (1) наши утверждения остаются необоснованными. Это доказательство сходимости громоздко, и я не буду его приводить. Существует теорема Мерцера о том, что в случае ядра, все собственные числа которого положительны (а в случае задачи Штурма—Лиувилля дело обстоит именно так), билинейная форма (1) всегда сходится.

Условием разложимости $f(x)$ в ряд по собственным функциям являлась непрерывность первой производной $f(x)$, но от этого требования можно освободиться.

Пусть дана некоторая непрерывная функция с разрывной производной. Пусть скачок производной равен a. Функция $K(x, \xi)$ также имеет скачок производной; он равен единице. Образуем разность

$$f(x) - aK(x, \xi).$$

Эта функция имеет непрерывную производную и, следовательно, может быть разложена в ряд. Но сама $K(x, \xi)$ также может быть разложена в ряд. Следовательно, и $f(x)$ может быть разложена в ряд. Мы расширили, таким образом, область функций, разложимых в ряд по собственным функциям.

Можно доказать, что ограничение, выражаемое требованием непрерывности самой функции, также не нужно. Всякая кусочно-гладкая функция, квадрат первой производной которой интегрируем $\left(\int_0^l [f'(x)]^2\,dx \text{ конечен}\right)$, может быть разложена в ряд по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля. В местах разрыва ряд дает среднее арифметическое, что хорошо известно на примере ряда Фурье.

Когда мы вычисляем ряд, мы практически должны ограничиваться несколькими членами. Поэтому часто сходимость ряда не представляет интереса.

Пусть для простоты $q(x) = 1$. Тогда

$$y(x, t) = \sum_i c_i \varphi_i(x) \cos \sqrt{\lambda_i}\, t,$$

c_i характеризует амплитуду i-го колебания. Нам часто вовсе не интересно, как выглядит функция $y(x, t)$ — форма струны или распределение напряжения в антенне в тот или иной определенный момент времени, а важно знать, насколько сильно выражена та или иная гармоника. Такая постановка вопроса возникает тогда, когда колебание $y(x, t)$ действует на резонатор. Здесь важно знать, как представлено колебание данной частоты во всем агрегате нормальных колебаний. В таких случаях быстрота сходимости несущественна, а важно знать величины c_i.

Итак, мы ставим следующий вопрос. Мы возбуждаем каким-то способом струну или антенну. Каково при этом распределение амплитуд различных тонов? Рассмотрим два случая.

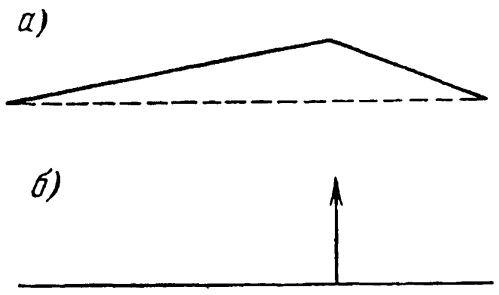


Рис. 182.

Первый случай — щипковое возбуждение. Мы „щиплем" струну в определенной точке, отводя ее, как показано на рис. 182, *а*, а затем опускаем.

Второй случай — ударное возбуждение. Струна не имеет начального отклонения, $f(x)=0$, но в некоторых местах имеет начальную скорость (рис. 182, *б*).

В первом случае начальная скорость по предположению равна всюду нулю и, следовательно, все B_i в (7) равны нулю. При $t=0$ имеем:

$$f(x)=\sum_i A_i\varphi_i(x).$$

Найти коэффициенты A_i в этом разложении не трудно: ведь мы получили задачу о разложении функции Грина в ряд по собственным функциям.

Как изменяется картина при изменении точки оттягивания струны ξ? При $t=0$ y есть функция от x при заданном ξ:

$$y(x, \xi)=K(x, \xi)=\sum_i \frac{\varphi_i(x)\,\varphi_i(\xi)}{\lambda_i}.$$

В рассматриваемом случае нормированные собственные функции таковы:

$$\varphi_i(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{i\pi x}{l}. \qquad (12)$$

Кроме того, как мы знаем, здесь

$$\sqrt{\lambda_i} = \frac{i\pi a}{l}.$$

Следовательно, можно записать решение в виде

$$y(x, \xi, t) = \frac{2l}{\pi^2 a^2} \sum_i \frac{\sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}}{i^2} \cos \sqrt{\lambda_i}\, t. \qquad (13)$$

Множители $\sin(i\pi x/l)$ дают распределение каждого колебания. Зависимость степени его возбуждения от ξ определяется множителем $\sin(i\pi\xi/l)$.

Удобнее всего сравнивать максимумы амплитуд отдельных колебаний. Максимальная амплитуда i-го колебания есть

$$M_i = \frac{2l}{i^2\pi^2 a^2}.$$

Здесь сразу видно, что разложение по собственным функциям сходится — в знаменателе стоит i^2. Таким образом, ряд (13) имеет мажоранту

$$\frac{2l}{\pi^2 a^2} \sum_i \frac{1}{i^2},$$

а ряд

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots,$$

как известно, очень хорошо сходится (таким образом, здесь все ясно и без теоремы Мерцера). Физически это означает, что с увеличением номера обертона его амплитуда сильно падает.

От места, где мы щиплем струну, очень сильно зависит, насколько возбужден тот или иной обертон. Если

$$\frac{i\pi\xi}{l} = \frac{\pi}{2},$$

то при данной величине начального отклонения i-ое колебание возбуждается наиболее сильно. Данный обертон сильнее всего возбуждается тогда, когда мы щиплем струну в точке, где он имеет пучность. Если

$$\frac{i\pi\xi}{l} = n\pi,$$

где n — целое число (возбуждение в узле данного обертона), то

$$\sin\frac{i\pi\xi}{l}=0$$

и i-ый обертон не возбуждается. Например, амплитуда второго обертона равна нулю, если $\xi=l/2$.

Отсутствуют все те обертоны, которые имеют узлы в точках, где мы щиплем струну. Не безразлично, в каком месте инструмента мы щиплем струну. Выбором этого места можно регулировать тембр.

В рассматриваемом случае каждый тон звучит в такой фазе, что ряд (13) содержит только косинусы.

Перейдем ко второму случаю. Здесь все $A_i=0$ и

$$F(x)=\frac{\partial y(x,0)}{\partial t}=\sum_i B_i\sqrt{\lambda_i}\varphi_i(x). \tag{14}$$

Предположим, что мы ударили струну в одной точке, так что функция $F(x)$ равна нулю во всем интервале, кроме точки ξ. Для того, чтобы действие было конечным, $F(x)$ должна быть в этой точке бесконечно большой, так чтобы интеграл

$$\int_0^l F(x)\,dx$$

был конечным. Определенная таким образом $F(x)$ не является функцией в собственном смысле[1].

Дирак ввел „несобственную“ функцию $\delta(x-\xi)$, которая по определению равна нулю при $x\neq\xi$, причем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi)\,dx=1.$$

С δ-функцией в сущности нельзя оперировать, как с функцией в собственном смысле. Но в последнее время употребление δ-функции было оправдано математически. Теорию струны, возбуждаемой ударом в одной точке, можно построить с помощью δ-функции. Но мы подойдем к задаче по-другому.

---

[1] [Задать функцию $y=F(x)$, значит задать значение y для каждого x; ср. 3-ю лекцию части I.]

Будем считать, что удар действует не в одной точке, а на конечном, но маленьком участке. Тогда оказывается, что не важна „ширина“ возвышения (рис. 183), а важен лишь интеграл

$$P=\int_0^l F(x)\,dx, \tag{15}$$

он „задает тон“. Действительно, если $F(x)$ отлична от нуля только в очень малом интервале, то $\sin(i\pi x/l)$ имеет на этом интервале почти постоянное значение. Поэтому для достаточно малых i (достаточно низких тонов) мы получаем:

$$C_i=B_i\sqrt{\lambda_i}=\int_0^l F(x)\varphi_i(x)\,dx=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l F(x)\sin\frac{i\pi x}{l}\,dx\cong$$

$$\cong\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{i\pi\xi}{l}\int_0^l F(x)\,dx=\sqrt{\frac{2}{l}}P\sin\frac{i\pi\xi}{l},$$

откуда, воспользовавшись выражением для λ_i, находим:

$$B_i=\frac{\sqrt{2l}}{i\pi a}\sin\frac{i\pi\xi}{l}.$$

Это верно, правда, только для не очень больших i.

Для максимальной амплитуды в случае ударного возбуждения мы получаем в результате:

$$M_i=\frac{2P}{i\pi a}\sin\frac{i\pi\xi}{l}. \tag{16}$$

Каждое из колебаний возбуждается сильнее всего, если мы ударяем струну в его пучности, и не возбуждается вовсе, если мы ее ударяем в его узле. Мы видим, насколько важно *место* удара.

Необходимо заметить следующее: амплитуды обертонов здесь спадают, как $1/i$, т. е. медленнее, чем в случае возбуждения щипком. Однако такой закон спадания имеет место только для амплитуд обертонов с не очень большим i. Для обертонов, длина волны которых сравнима с шириной интервала возбуждения, это уже неверно. В противном случае мы имели бы ряд, который мог бы не сходиться.

Возьмем антенну, открытую с обоих концов. Начальным условиям (14) здесь соответствует случай, когда в начальный момент

$I=0$, но имеет место некоторое распределение величины $\partial I/\partial t$, т. е., согласно уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{1}{C}\frac{\partial I}{\partial t},$$

некоторое начальное распределение величины V.

Условию (15) соответствует случай, когда $\partial I/\partial t$ в начальный момент отлична от нуля только в одной точке, причем интеграл

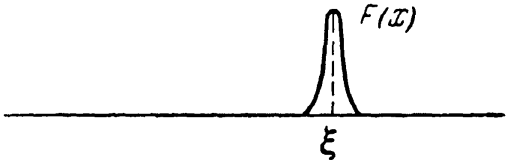


Рис. 183.

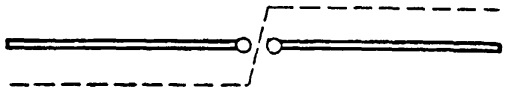


Рис. 184.

остается конечным, т. е. задана разность потенциалов между двумя отрезками антенны. Это можно осуществить с помощью искрового промежутка (рис. 184).

В начальный момент имеем для рассматриваемого электрического случая:

$$\int_0^l \left(\frac{\partial I}{\partial t}\right)_{t=0} dx=\frac{C(V_1-V_2)}{l}=P.$$

Те обертоны, для которых точка, где расположен искровой промежуток, является узлом, не будут возбуждаться.

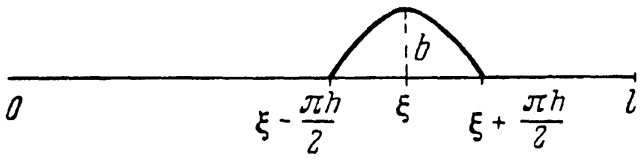


Рис. 185.

Полученные нами результаты нас не вполне удовлетворяют, так как в них не учитывается, как сказывается на распределении обертонов ширина участка, где приложен удар. Между тем этот вопрос возникает, например, в связи с устройством роялей. Здесь весьма существенны вопросы о том, *где* надо ударять и *как* надо ударять. Полезно просчитать в связи с этим задачу с некоторой заданной функцией $F(x)$ до конца.

Я приведу пример Гельмгольца. Он принимает, что функция $F(x)$ имеет вид, показанный на рис. 185:

$$F(x)=\begin{cases} b\cos\dfrac{x-\xi}{h} & \text{при } |x-\xi|\leqslant\dfrac{\pi h}{2}, \\ 0 & \text{при } |x-\xi|>\dfrac{\pi h}{2}. \end{cases}$$

Эту функцию мы можем разложить в ряд по собственным функциям. Для максимальной амплитуды i-го обертона мы получим следующую довольно сложную формулу:

$$M_i=\frac{2}{i\pi a}\sin\frac{i\pi\xi}{l}\cdot\frac{P\cos\dfrac{i\pi h}{2l}}{\left(\dfrac{i\pi h}{l}\right)^2-1}.$$

При малых h и i можно зачеркнуть выражение $\left(\frac{i\pi h}{l}\right)^2$ и считать косинус равным единице, что дает

$$M_i=\frac{2P}{i\pi a}\sin\frac{i\pi\xi}{l},$$

т. е. прежнее выражение (16). Но перейдем к более высоким обертонам (i велико). Там, наоборот, выражение $\left(\frac{i\pi h}{l}\right)^2$ будет велико по сравнению с единицей и обертоны начинают спадать очень быстро, как $1/i^3$. Чем шире промежуток возбуждения h, тем менее выражены высокие обертоны. Практически тоны выше восьмого почти незаметны. Седьмой и восьмой обертоны обычно неприятны для уха, и их желательно погасить. Оказывается, что достаточно расположить точку удара по середине между точками $\xi=l/7$ и $\xi=l/8$, чтобы эти обертоны были практически незаметны.

Тембр рояля зависит не только от ширины, но и от жесткости молоточка, и от того как происходит удар. Этим определяется то, что можно играть на рояли с хорошим и плохим туше.

Заметим в заключение, что мы получили в качестве побочного продукта наших рассуждений математическую теорему о том, что любая функция, непрерывная, имеющая кусочно-непрерывную производную и обращающаяся в нуль на концах интервала, может быть разложена в ряд Фурье по синусам. Эта теорема следует из того, что функции (12) являются собственными функциями однородной струны, закрепленной на концах.

ПЯТНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(23/III 1932 г.)

Замечания о собственных колебаниях. Вынужденные колебания. Однородное и неоднородное интегральное уравнение, альтернатива. Случай, когда внешняя сила ортогональна к собственному колебанию. Альтернатива в случае дискретной системы. Нарастающие решения при резонансе. Форма колебаний при очень малой частоте внешней силы. Форма колебаний вблизи резонанса. Зависимость амплитуды вынужденного колебания от формы внешней силы.

Введя функцию Грина, мы составили интегральное уравнение, которому удовлетворяют колебания линейной распределенной системы.

Мы приняли, что внешняя сила является гармонической (всякую другую интересующую нас силу можно представить как суперпозицию гармонических сил). Тогда уравнение для функции $\varphi(x)$, описывающей форму колебания, таково:

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^l V(x,\xi)\,q(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi+\int_0^l V(x,\xi)\,g(\xi)\,d\xi,$$

где λ — квадрат частоты внешней силы.

Если внешней силы нет, то $g(\xi)=0$ (задача о *собственных* колебаниях) и

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^l V(x,\xi)\,q(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

(однородное уравнение). Это уравнение имеет решение только при определенных значениях λ — собственных значениях задачи, определяющих квадраты собственных частот. Каждому собственному значению соответствует одно решение — нормальное колебание. Общее движение есть сумма нормальных колебаний; оно определено однозначно, если заданы расположение и скорости всех точек при $t=0$; но при этом возникает вопрос о разложимости произвольной функции в ряд по собственным функциям задачи.

Мы привели ядро к симметричному виду; всякое интегральное уравнение с симметричным ядром имеет хотя бы одно собственное значение и соответственно хотя бы одно решение. Мы показали, что всякая функция, достижимая с помощью ядра, может быть разложена в ряд по собственным функциям. При специальном виде ядра, соответствующем нашей колебательной задаче, мы

доказали, что число собственных функций бесконечно и что всякая непрерывная функция с кусочно-непрерывной первой производной и даже всякая кусочно-непрерывная функция могут быть разложены в ряд по собственным функциям.

Пусть функция $f(x)$ разлагается в ряд по собственным функциям с коэффициентами c_i. Система функций — *полная*, если

$$\int_0^l f^2(x)\,dx = \sum_i c_i^2.$$

Собственные функции задачи Штурма—Лиувилля всегда образуют полную систему, но, вообще говоря, для произвольной системы ортогональных функций

$$\int_0^l f^2(x)\,dx \geqslant \sum_i c_i^2,$$

причем знак равенства имеет место только в случае полной системы.

Можно показать, что полная система всегда замкнута, т. е. нет функции, ортогональной ко всем функциям системы и не принадлежащей к этой системе. Обратно: всякая замкнутая система функций является полной.

Переходим к задаче о *вынужденных колебаниях*.

Для простоты отождествим функции φ и ψ, приняв $q(x)=1$, т. е. взяв однородную по плотности струну. Имеем неоднородное уравнение вида

$$z(x) = f(x) + \lambda \int_0^l K(x, \xi)\, z(\xi)\, d\xi,$$

где

$$f(x) = \int_0^l K(x, \xi)\, g(\xi)\, d\xi,$$

причем $f(x)$ — известная функция, так как ядро $K(x, \xi)$ и сила, действующая на струну, $g(\xi)$ известны. Требуется найти распределение амплитуд $z(x)$.

Перепишем интегральное уравнение в таком виде:

$$z(x) - f(x) = \lambda \int_0^l K(x, \xi)\, z(\xi)\, d\xi. \qquad (1)$$

Таким образом, функция $z(x)-f(x)$ достижима с помощью ядра $K(x, \xi)$. Следовательно, ее можно разложить в ряд по собственным функциям однородного уравнения:

$$z(x)-f(x)=\sum_i c_i\psi_i(x).$$

Будем считать, что задача о собственных колебаниях решена и, значит, функции $\psi_i(x)$ известны. Тогда c_i могут быть вычислены по формуле

$$c_i=\int_0^l [z(\xi)-f(\xi)]\psi_i(\xi)\,d\xi. \tag{2}$$

Но функция $z(x)$ неизвестна. С другой стороны, коэффициент Фурье c_i можно выразить через $h(\xi)$; здесь $h(\xi)$ есть $\lambda z(\xi)$ и

$$c_i=\frac{\lambda}{\lambda_i}\int_0^l z(\xi)\psi_i(\xi)\,d\xi. \tag{3}$$

Исключая $z(\xi)$ из уравнений (2) и (3), находим:

$$c_i=\frac{\lambda}{\lambda_i-\lambda}\int_0^l f(\xi)\psi_i(\xi)\,d\xi. \tag{4}$$

Этим задача решена, если только $\lambda_i\neq\lambda$. Если $\lambda=\lambda_i$, то оба выражения для c_i несовместны, кроме того случая, когда $\int_0^l f(\xi)\psi_i(\xi)\,d\xi=0$. Если $\lambda=\lambda_i$ и, кроме того, $\int_0^l f\psi_i\,d\xi\neq 0$, то уравнение (1) не имеет решения. Таким образом, мы пришли к важной математической теореме: неоднородное интегральное уравнение всегда имеет решение, если $\lambda\neq\lambda_i$; если же $\lambda=\lambda_i$ и

$$\int_0^l f(\xi)\psi_i(\xi)\,d\xi\neq 0,$$

то неоднородное уравнение не имеет решения. Следовательно, в общем случае: либо однородное уравнение имеет решение, либо неоднородное уравнение имеет решение.

Решение неоднородного уравнения таково:

$$z(x)=f(x)+\lambda\sum_i\left\{\frac{1}{\lambda_i-\lambda}\int_0^l f(\xi)\psi_i(\xi)\,d\xi\right\}\psi_i(x), \tag{5}$$

причем ряд сходится равномерно.

Пусть $\lambda=\lambda_k$ и

$$\int_0^l f(\xi)\psi_k(\xi)\,d\xi=0. \tag{6}$$

Тогда легко показать, что решение неоднородного уравнения есть

$$z(x)=f(x)+\lambda_k\sum_i{}'\left\{\frac{1}{\lambda_i-\lambda_k}\int_0^l f(\xi)\psi_i(\xi)\,d\xi\right\}\psi_i(x)+C\psi_k(x), \tag{7}$$

где C — произвольная постоянная, а сумму Σ' следует распространить на все значения $i\neq k$. Решение неоднозначно из-за произвола в выборе C.

Выясним физический смысл условия (6). Подставим в него

$$f(x)=\int_0^l K(x,\xi)\,g(\xi)\,d\xi.$$

Тогда

$$\int_0^l\int_0^l K(x,\xi)\,g(\xi)\,\psi_k(x)\,d\xi dx=0,$$

или, так как

$$\int_0^l K(x,\xi)\,\psi_k(x)\,dx=\frac{\psi_k(\xi)}{\lambda_k},$$

то

$$\frac{1}{\lambda_k}\int_0^l g(\xi)\,\psi_k(\xi)\,d\xi=0,$$

т. е. функции $g(x)$ и $\psi_k(x)$ должны быть ортогональны. Если этого нет, то неоднородное уравнение не имеет решения при $\lambda=\lambda_k$. Но сила, действующая на единицу длины системы, есть $g(x)\cos\sqrt{\lambda_k}t$; работа этой силы за время dt на элементе длины dx, отнесенная к колебанию с частотой внешней силы, есть

$$\sqrt{\lambda_k}\,g(x)\,dx\cos\sqrt{\lambda_k}t\cdot\psi_k(x)\cos(\sqrt{\lambda_k}t+\theta)\,dt.$$

При этом работа на протяжении всей системы будет

$$\sqrt{\lambda_k}\cos\sqrt{\lambda_k}\,t\cos(\sqrt{\lambda_k}\,t+\theta)\,dt\int_0^l g(\xi)\,\psi_k(\xi)\,d\xi$$

Смысл условия (6) — в том, что при данном колебании внешняя сила не производит работы; если же работа производится, то неоднородное уравнение не имеет решения.

Итак, если частота внешней силы совпадает с одной из собственных частот системы, то, вообще говоря, неоднородное уравнение (1) не имеет решения; оно имеет решение в частном случае, когда сила, действуя на собственное колебание, имеющее частоту внешней силы, не производит работы.

Что означает „нет решения"? Мы знаем, что это — случай резонанса. Физически интересен именно этот случай, а не тот, когда сила не производит работы. Подобный же вопрос встречается и в дискретных системах с несколькими степенями свободы. Только что доказанная теорема там тоже имеет место, но в другом, конечно, виде; вообще говоря, либо система однородных линейных дифференциальных уравнений имеет решение, либо система с правыми частями имеет решение (смотря по тому, равен или не равен нулю детерминант однородной системы).

Возьмем две степени свободы (рис. 108). При одном собственном (нормальном) колебании ток в первом контуре есть

$$i_{11}=a_1\cos\omega_1 t$$

и ток во втором контуре

$$i_{21}=a_2\cos\omega_1 t.$$

При другом собственном (нормальном) колебании ток в первом контуре

$$i_{12}=b_1\cos\omega_2 t,$$

а ток во втором контуре

$$i_{22}=b_2\cos\omega_2 t.$$

Отношения a_1/a_2 и b_1/b_2 заданы системой.

Если на такую систему действует внешняя сила частоты ω_1, то будет резонанс всегда, кроме случая, когда внешняя сила

„распределена“ так, что она „ортогональна“ к „собственной функции“, соответствующей частоте ω_1, т. е. выполнено условие

$$a_1\mathcal{E}_1 + a_2\mathcal{E}_2 = 0$$

ортогональности векторов (a_1, a_2) и $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$.

Физически решение всегда есть. Если имеет место совпадение частот, то даже в отсутствие сопротивления токи имеют в каждый момент времени какое-то значение. Физически, следовательно, надо сказать: мы искали *периодические* решения вида $z\cos\sqrt{\lambda}t$, но их не оказалось, т. е. в системе не будет *установившегося* состояния. Если бы мы приняли во внимание сопротивление, то интегральное уравнение было бы другое и установившееся состояние при резонансе было бы возможно.

Но в отсутствие сопротивления существуют возрастающие решения, которые также представляют интерес, так как практически процесс возрастания в системе без затухания в течение довольно долгого времени такой же, как при наличии не слишком большого затухания. Эти вопросы проще рассматривать с помощью дифференциальных, а не интегральных уравнений.

В случае *одной* степени свободы

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = A\cos\omega t$$

при $\omega \neq \omega_0$ имеется решение

$$y = a\cos\omega t, \tag{8}$$

где

$$a = \frac{A}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Если же $\omega = \omega_0$, то решения вида (8) не существует, но зато существует, как мы знаем[1], нарастающее решение вида

$$y = \frac{A}{2\omega_0} t\sin\omega_0 t.$$

Этой формулой можно пользоваться для исследования нарастания (в начале процесса) в системах с небольшим затуханием.

В случае распределенной системы можно поступать так же: или вводить затухание, или искать нарастающее решение. Здесь вопрос осложняется тем, что распределение силы $g(x)$ может быть

---

[1] [См. 16-ю лекцию части I.]

различное. Но оказывается, что вид процесса при всех возможных распределениях $g(x)$ — один и тот же.

Действительно, пусть $\lambda = \lambda_i$ и сила имеет вид

$$g(x)\cos\sqrt{\lambda_i}t.$$

Напишем:

$$g(x) = g(x) - b\psi_i(x) + b\psi_i(x) = \Phi(x) + b\psi_i(x)$$

и подберем постоянную b так, чтобы функция $\Phi(x)$ была ортогональна к $\psi_i(x)$:

$$\int_0^l \Phi(x)\psi_i(x)\,dx = \int_0^l g(x)\psi_i(x)\,dx - b\int_0^l \psi_i^2(x)\,dx = 0,$$

или, так как функция ψ_i нормирована,

$$\int_0^l g(x)\psi_i(x)\,dx = b.$$

Таким образом, внешнюю силу всегда можно разбить на ортогональную часть и на неортогональный остаток; ортогональная часть не интересна, так как она нарастания не дает. Неортогональная часть есть собственная функция. Достаточно поэтому исследовать нарастание при действии внешней силы, имеющей распределение вида собственной функции данной частоты.

Таким образом, решения однородного уравнения существуют только при определенных значениях λ; для этих значений λ неоднородное уравнение, вообще говоря, не имеет решений, кроме тех случаев, когда $f(x)$ имеет специальный вид, такой, что выполнено условие (6), в котором ψ_k — собственная функция, соответствующая собственному значению λ_k.

В нашем случае задачи типа Штурма—Лиувилля данному λ_k соответствует только одна собственная функция ψ_k. В задачах не-штурм-лиувиллевского типа данному λ_k может соответствовать несколько функций ψ_k. Тогда для того, чтобы существовало решение неоднородного уравнения, условие ортогональности (6) должно удовлетворяться функцией $f(x)$ для всех функций ψ_k, принадлежащих к данному λ_k.

Если $\lambda \neq \lambda_i$, то общее решение однородного уравнения имеет вид

$$z(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_i \psi_i(x)}{\lambda_i - \lambda}, \qquad (9)$$

где

$$\gamma_i = \int_0^l f(\xi)\,\psi_i(\xi)\,d\xi. \tag{10}$$

Если, например, $\lambda = \lambda_1$ и собственному значению λ_1 соответствуют k собственных функций: $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$, и если условие ортогональности внешней силы ко всем собственным функциям $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ соблюдено, то решение имеет вид

$$z(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\gamma_i \psi_i(x)}{\lambda_i - \lambda} + \sum_{\nu=1}^{k} b_\nu \psi_\nu(x).$$

Это решение неоднозначно, ибо все b_ν — произвольные величины. Физически это означает, что, кроме вынужденных колебаний, в системе останутся собственные, с произвольными амплитудами, так как внешняя сила к ним ортогональна и работы не производит.

Пусть λ очень мало по сравнению с наименьшим собственным значением, т. е. частота внешней силы гораздо меньше основной частоты системы:

$$\lambda \ll \lambda_i.$$

Тогда приближенно решение имеет вид

$$z(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_i \lambda}{\lambda_i} \psi_i(x).$$

Если λ/λ_i настолько мало, что можно пренебречь суммой, то $z(x) = f(x)$, или, если перейти к первоначальным функциям,

$$z_1(x) = \int_0^l V(x, \xi)\, g_1(\xi)\, d\xi,$$

где $z_1(x)$ амплитуда; $V(x, \xi)$ — функция Грина; $g_2(\xi)$ — приложенная сила. Следовательно,

$$y(x, t) = z_1(x) \cos \sqrt{\lambda}\, t = \frac{f(x)}{\sqrt{q(x)}} \cos \sqrt{\lambda}\, t.$$

Но

$$\int_0^l V(x, \xi)\, g_1(\xi)\, d\xi$$

есть статическое отклонение под действием постоянной силы $g_1(\xi)$; значит, система в этом случае следует за действием внешней силы.

Если λ подходит очень близко к значению λ_i, то соответствующий член в решении очень велик по сравнению с остальными и приближенно

$$y(x, t) = \frac{\lambda\gamma_i}{\lambda_i - \lambda} \frac{\psi_i(x)}{\sqrt{q(x)}} \cos \sqrt{\lambda_i} t,$$

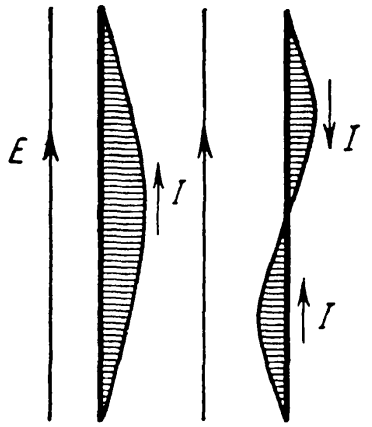


Рис. 186.

т. е. при подходе к резонансу с i-ым обертоном система колеблется, независимо от формы внешней силы, с распределением амплитуд, как угодно близким к распределению в случае собственного колебания $\psi_i(x)$. Это сильно упрощает дело. Но нельзя переносить эти первичные формы колебания на случай, когда λ не близко к λ_i; тогда форма колебания может быть совсем иной и меняется в зависимости от формы внешней силы. Последняя входит через величину γ_i, выражаемую формулой (10).

Будем и дальше считать, что $q(x) = 1$, т. е. $\psi_i = \varphi_i$. Подставляя в (10) значение

$$f(\xi) = \int_0^l K(x, \xi)\, g(\xi)\, d\xi,$$

находим:

$$\gamma_i = \frac{1}{\lambda_i} \int_0^l g(\xi)\, \psi_i(\xi)\, d\xi.$$

Если λ близко к λ_i, то амплитуда колебания все же может быть невелика. Это будет, если γ_i мало, т. е. в том случае, когда распределение внешней силы близко к ортогональности по отношению к функции ψ_i. Таким образом, амплитуда колебания зависит не только от соотношения частот, но и от распределения внешней силы. Величина γ_i служит мерой для оценки ответа системы на возбуждение.

Пусть, например, антенна находится под действием однородной плоской волны (рис. 186). Тогда

$$g(x) = \text{const}, \quad \gamma_i = \frac{g}{\lambda_i} \int_0^l \psi_i(\xi)\, d\xi.$$

Антенна будет сильно отвечать на частоты, близкие к частотам основного тона, второго обертона и т. д. Нечетные обертоны возбуждаться не будут.

ШЕСТНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(29/III 1932 г.)

Нарастание колебаний при резонансе. Случай, когда внешняя сила сосредоточена на малом участке. Рассмотрение того же случая с помощью дифференциального уравнения. Зависимость амплитуды от места возбуждения. Случай, когда задано движение в точке. Изменение числа узлов при повышении частоты внешней силы. Сравнительная оценка интегральных и дифференциальных уравнений. Интегральные уравнения колебаний стержня и мембраны. Приведение задачи теории потенциала к интегральным уравнениям.

Продолжим рассмотрение вынужденных колебаний. Как мы видели, когда λ (квадрат частоты внешней силы) точно равно одному из собственных значений λ_i, наша теория, не учитывающая затухания, не дает стационарного решения. В действительности, конечно, вследствие затухания стационарное решение существует и в этом случае. Чем меньше затухание, тем меньше те значения $|\lambda - \lambda_i|$, при которых теория без затухания еще дает хорошее приближение.

При достаточном отличии между λ и λ_i нет смысла вести расчеты с учетом затухания. Этого часто не понимают. Ведут расчеты с учетом затухания, что приводит к сложным и громоздким формулам. Но при λ, очень близком к λ_i, нельзя пренебрегать даже малым затуханием.

Естественно попытаться получить из теории без затухания все то, что она может дать и для случая, когда λ близко к λ_i. Оказывается, что нарастание колебаний в начальной стадии процесса происходит при наличии затухания почти так же, как если бы его не было. Нарастание колебаний легче всего исследовать, исходя из дифференциального уравнения

$$g(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial y}{\partial x}\right) = q \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где

$$g(x, t) = g(x) \cos \sqrt{\lambda_i}\, t. \tag{2}$$

Здесь λ_i — одно из собственных значений однородного уравнения.

Возьмем начальные условия

$$y = \dot{y} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{3}$$

Представим $g(x)$ в таком виде:

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x),$$

где $g_1(x)$ ортогональна к $\varphi_i(x)$. Как мы знаем, нарастание дает только слагаемое $g_2(x)$.

Составляющие $g_2(x)$ различных функций $g(x)$ могут отличаться только на постоянный множитель. Действительно напишем:

$$g(x) = [g(x) - bq(x)\varphi_i(x)] + bq(x)\varphi_i(x).$$

Можно подобрать такое значение b, чтобы функция, стоящая в квадратных скобках, была ортогональна к $\varphi_i(x)$, т. е. чтобы имело место равенство

$$\int_0^l g\varphi_i dx - b\int_0^l q\varphi_i^2 dx = 0$$

(это уравнение разрешимо относительно b, так как вследствие $q(x) > 0$ второй интеграл не равен нулю). Таким образом, достаточно исследовать нарастание в случае

$$g = bq\varphi_i.$$

Решением, удовлетворяющим начальным условиям (3), является в этом случае

$$y(x, t) = \frac{b\varphi_i(x)}{\sqrt{\lambda_i}} t \sin \sqrt{\lambda_i} t,$$

что легко проверить подстановкой. Таким образом, пока не сказывается затухание, амплитуда растет пропорционально времени.

Разберем случай внешней силы, сосредоточенной на малом участке. Этот случай имеет место, например, при возбуждении антенны с помощью короткой катушки (связь предполагается настолько слабой, что можно пренебречь обратным действием антенны на возбуждающий контур). Будем считать, что

$$q(x) = 1.$$

Имеем:

$$\gamma_i = \int_0^l f(x)\psi_i(x)\,dx = \frac{1}{\lambda_i}\int_0^l g(x)\psi_i(x)\,dx. \tag{4}$$

Но

$$f(x) = \int_0^l K(x, \xi)\,g(\xi)\,d\xi, \tag{5}$$

причем

$$K(x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(x)\,\psi_i(\xi)}{\lambda_i}. \tag{6}$$

Следовательно,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(x)}{\lambda_i} \int_0^l g(\xi)\,\psi_i(\xi)\,d\xi,$$

и на основании (4) и выражения (9) предыдущей лекции решение уравнения (1) предыдущей лекции можно представить в таком виде:

$$z(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(x)}{\lambda_i - \lambda} \int_0^l g(\xi)\,\psi_i(\xi)\,d\xi.$$

Сделаем предельный переход к силе, сосредоточенной в точке $x = a$. Будем считать, что длина участка, на котором $g(x)$ отлична от нуля, стремится к нулю, но вместе с тем плотность силы $g(x)$ на этом участке растет неограниченно, и притом так, что

$$\int_0^l g(\xi)\,d\xi = 1.$$

В пределе $g(x)$ превращается в функцию Дирака $\delta(x - a)$. При этом

$$z(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(x)\,\psi_i(a)}{\lambda_i - \lambda}. \tag{7}$$

Прием, который мы применили, не имеет здесь математического обоснования. Сомнение в его законности может возникнуть на основании следующих соображений. Если участок, на котором $g(x) \neq 0$, очень мал, то для не слишком больших i можно приближенно считать $\psi_i(x) = \text{const}$ на этом участке. Но при достаточно большом i соответствующее $\psi_i(x)$ будет заметно осцилли-

ровать на протяжении сколь угодно малого заданного участка: число нулей функции $\psi_i(x)$ на любом заданном отрезке неограниченно растет с ростом i. Однако, основываясь на том, что билинейная форма (6) сходится равномерно, можно доказать, что ряд (7) является решением задачи о вынужденных колебаниях в предельном случае силы, сосредоточенной в точке.

Если $\lambda \ll \lambda_i$, то

$$z(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(x)\,\psi_i(a)}{\lambda_i} = K(x, a),$$

и мы опять получаем статический случай. Можно сказать, что выражение (7) есть обобщение билинейной формы (6) на случай, когда сила является гармонической.

Если сила приложена к точке $x = a$, колебание в точке $x = b$ выражается формулой

$$z(b) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(b)\,\psi_i(a)}{\lambda_i - \lambda}.$$

Из нее следует для рассматриваемого случая теорема взаимности: если электродвижущая сила приложена к точке b, то ток в точке a — такой же, каким был бы ток в точке b, если бы сила была приложена к точке a. Таким образом, теорема взаимности, полученная ранее[1] для статического случая, обобщена нами на случай вынужденных колебаний.

Из формулы (7) следует, что если λ близко к λ_i, форма (пространственное распределение) вынужденного колебания близка к форме i-го собственного колебания. Где бы ни была приложена сила частоты $\sqrt{\lambda_i}$, узлы i-го собственного колебания не раскачиваются. Поэтому согласно теореме взаимности, если сила частоты $\sqrt{\lambda_i}$ приложена к узлу i-го колебания, это колебание не возбудится.

Рассмотрение вынужденных колебаний с помощью интегральных уравнений приводит к решению в виде ряда. Это иногда удобно, но недостаточно наглядно. Иногда желательно получить решение в замкнутом виде. Покажем, что дифференциальное уравнение приводит к решению такого вида.

---

[1] [См. 26-ю лекцию части I.]

Рассмотрим однородную систему. Пусть э. д. с. приложена к точке $x=a$. Всюду, кроме точки a, выполняются уравнения

$$\frac{\partial I}{\partial x}=-C\frac{\partial V}{\partial t}, \quad \frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{L}{c^2}\frac{\partial I}{\partial t},$$

где C и L — емкость и индуктивность на единицу длины. В точке $x=a$ потенциал имеет скачок, так что

$$\frac{1}{C}\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)_{a-0}=-\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{a-0}, \quad \frac{1}{C}\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)_{a+0}=-\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{a+0},$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{C}\left\{\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)_{a-0}-\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)_{a+0}\right\}=-\frac{\partial}{\partial t}(V_{a-0}-V_{a+0}).$$

Пусть э. д. с. в точке $x=a$ равна $\sin\omega t$. Тогда

$$V_{a+0}-V_{a-0}=\sin\omega t,$$

а значит,

$$\frac{1}{\omega C}\left\{\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)_{a-0}-\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)_{a+0}\right\}=\cos\omega t. \tag{8}$$

Ток I всюду непрерывен, так как сосредоточенных емкостей нет.

Краевым условиям задачи $I(0)=I(l)=0$ удовлетворяют решения вида:

$$\varphi_1(x,t)=A\sin\frac{\omega x}{c}\cos\omega t \quad \text{при} \quad 0\leqslant x\leqslant a; \tag{9}$$

$$\varphi_2(x,t)=B\sin\frac{\omega(l-x)}{c}\cos\omega t \quad \text{при} \quad a\leqslant x\leqslant l. \tag{10}$$

Постоянные A и B нужно подобрать так, чтобы удовлетворить условию

$$\varphi_1(a)=\varphi_2(a), \tag{11}$$

являющемуся следствием непрерывности тока, и условию (8) для скачка производной $\partial I/\partial x$. Подставив (9) и (10) в (11) и (8), получаем для A и B следующие уравнения:

$$A\sin\frac{\omega a}{c}-B\sin\frac{\omega(l-a)}{c}=0;$$

$$A\cos\frac{\omega a}{c}+B\cos\frac{\omega(l-a)}{c}=cC.$$

Решая их, получаем:

$$A = cC\frac{\sin\frac{\omega(l-a)}{c}}{\sin\frac{\omega l}{c}}, \quad B = cC\frac{\sin\frac{\omega a}{c}}{\sin\frac{\omega l}{c}}. \tag{12}$$

Наконец, подставляя (12) в (9) и (10), получаем решение нашей задачи в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} I(x,t) &= cC\frac{\sin\frac{\omega(l-a)}{c}}{\sin\frac{\omega l}{c}}\sin\frac{\omega x}{c}\cos\omega t \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant a; \\ I(x,t) &= cC\frac{\sin\frac{\omega a}{c}}{\sin\frac{\omega l}{c}}\sin\frac{\omega(l-x)}{c}\cos\omega t \quad \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant l. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Внешние формулы (13) выглядят сложнее, чем (7), где

$$\psi_i(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{i\pi x}{l},$$

но толкование решения (13) проще. Конечно, оба решения тождественны.

Только что примененный нами метод дает решение в замкнутом виде также при учете затухания, но решение с учетом затухания является более сложным.

Вынужденное колебание, возбуждаемое гармонической силой, действующей в одной точке, выражается формулой

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\psi_i(x)\psi_i(a)}{\lambda_i - \lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\,t + \varepsilon). \tag{14}$$

Если λ мало по сравнению со всеми λ_i, имеем приближенно:

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\psi_i(x)\psi_i(a)}{\lambda_i}\cos(\sqrt{\lambda}\,t + \varepsilon),$$

— в каждый данный момент имеет место статическое отклонение, причем оно периодически меняется с частотой внешней силы. Если λ близка к одному из λ_i, то соответствующий член является преобладающим, и можно писать приближенно:

$$y(x,t) \cong \frac{\psi_i(x)\psi_i(a)}{\lambda_i - \lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\,t + \varepsilon).$$

Вообще говоря, колебание (14) не совпадает по форме ни с одним из собственных колебаний, и при вынужденных колебаниях не имеет смысла говорить, что система колеблется в полволны и т. д. Но при подходе к резонансу форма вынужденного колебания приближается к форме соответствующего собственного колебания.

Здесь интересно отметить еще одно обстоятельство. Амплитуда вынужденного колебания зависит от того, где приложена сила. При одной и той же величине силы амплитуда вынужденного колебания тем больше, чем больше значение $\psi_i(x)$ в точке приложения силы $x=a$. Колебание будет наиболее интенсивным, если сила приложена в пучности соответствующего колебания. Если сила приложена в узле, т. е. так, что $\psi_i(a)=0$, колебание не возбуждается вовсе. Это — частный случай силы, ортогональной к собственной функции $\psi_i(x)$. В самом деле, если $g(x)\neq 0$ только в такой точке x, где $\psi_i(x)=0$, то

$$\int_0^l g\psi_i dx=0.$$

Если желательно возбудить антенну в третьем обертоне, то возбуждающую катушку можно поместить на расстоянии $l/6$ от конца. Но на практике часто дело обстоит не так просто. Получаются две связанные системы и вместо частоты $\sqrt{\lambda_i}$ получаются *две* частоты; отличие между ними тем больше, чем сильнее связь. Обычно считают, что ослабить связь — это значит уменьшить коэффициент взаимной индукции M. Между тем „действительная связь“ [1] зависит не только от величины M, но и от того, *где* она осуществляется (например, в узле или пучности соответствующего колебания). „Действительная связь“ тем сильнее, чем ближе к пучности расположена возбуждающая катушка.

В общем случае разложение (14) часто оказывается недостаточно наглядным. Выше мы получили то же самое решение, но в замкнутом виде (13). С помощью этого решения можно проследить за видом колебания, не суммируя ряд, что очень неприятно. Если мы разложим (13) в ряд, мы получим (14), и наоборот, суммирование ряда (14) приводит к формулам (13).

Мы рассмотрели случай, когда задана *сила*, действующая в определенной точке. Возможна другая постановка задачи: задано

[1] [„Связанность“, см. 25-ю лекцию части I.]

движение одной из точек распределенной системы. Например, одна из точек струны прикреплена к ножке камертона, совершающего заданные колебания. Если решать задачу об антенне, возбуждаемой в точке, исходя не из тока, а из напряжения, мы тоже получим случай, когда задано *движение* в точке, а не сила.

Здесь интересно следующее. Будем возбуждать струну близко к резонансу. Если задана амплитуда колебания в точке, то наиболее выгодный выбор этой точки противоположен тому, какой был в случае заданной силы. Наиболее сильное возбуждение будет, если данное колебание создается в узле, наиболее слабое — если оно задается в пучности. Физически это вполне понятно. Вблизи резонанса форма колебания близка к форме собственного колебания; поэтому при амплитуде, заданной в узле, колебание в пучности будет гораздо больше, чем если та же амплитуда задана в самой пучности.

О форме колебания многое можно сказать без вычислений. Пусть задан период силы. Форма колебания, вообще говоря, не похожа ни на одно из собственных колебаний, но есть очень изящные приемы, позволяющие решить, будут ли узлы и сколько их будет.

Пусть, например, на струну действует в некоторой точке гармоническая сила, частота которой меньше основной собственной частоты. В этом случае на струне не может быть узла ни слева, ни справа от точки приложения силы (кроме закрепленных концов струны). Это доказывается следующим образом. Пусть сила приложена в точке A. Предположим, что в точке B возникает узел. Закрепим точку B. Отрезок OB будет продолжать колебаться с частотой ω внешней силы, т. е. эта частота является одной из собственных частот струны OB. Но ни одна из собственных частот струны OB не может быть ниже основной частоты *всей* струны и, следовательно, не может быть меньше ω. Мы пришли к противоречию (всякое укорочение струны ведет, как мы видели, к повышению всех собственных частот). Наше утверждение, таким образом, доказано.

Далее можно показать, что если частота внешней силы переходит, повышаясь, через основную частоту участка OB, то на этом участке появляется один узел.

Можно сделать ряд высказываний о расположении узлов в общем случае. Это имеет большое практическое значение в случае антенны, так как на соседних участках, разделенных узлами тока, токи

текут в противоположных направлениях, а это существенно для излучения.

Вернемся к общей оценке интегральных уравнений. Какой смысл имело введение этого математического аппарата?

Первое преимущество заключается в следующем. Дифференциальное уравнение вовсе не приурочено к данной задаче. Физическая задача — это задача, скажем, о стержне такой-то длины, с такими-то граничными условиями. Для того, чтобы ее охватить, нужно дифференциальное уравнение плюс граничные условия. Интегральное уравнение содержит в себе всю задачу. Оно имеет совсем другой охват, чем дифференциальное уравнение.

Перейдем ко второму преимуществу интегральных уравнений. Возьмем, например, поперечные колебания стержня. Они подчиняются дифференциальному уравнению

$$p\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+q\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0,$$

совершенно отличному от уравнения продольных колебаний стержня. Кроме того, здесь возможно большее разнообразие краевых условий. Концы могут быть свободны, или заделаны, или могут находиться на опоре. Здесь должны быть заданы *четыре* граничных условия: по *два* для каждого конца. Например, для свободного конца граничные условия таковы:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=0.$$

Таким образом, здесь весь тип задачи существенно отличен от соответствующей задачи для продольных колебаний.

Но интегральное уравнение поперечных колебаний стержня, составленное для функции $\varphi(x)$, описывающей распределение амплитуды

$$y=\varphi(x)\cos\sqrt{\lambda}\,t$$

имеет вид

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^l G(x,\xi)\,q(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{15}$$

т. е. такой же вид, как для продольных колебаний. Отличие между

обеими задачами заключено в функции Грина $G(x, \xi)$. Для поперечных колебаний стержня

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{x(\xi - l)(x^2 + \xi^2 - 2l\xi)}{6lp} & \text{при } x \leqslant \xi, \\ \dfrac{\xi(x - l)(\xi^2 + x^2 - 2lx)}{6lp} & \text{при } x \geqslant \xi. \end{cases}$$

Мы видим, какой большой охват имеет интегральное уравнение вида (15).

Перейдем к двухмерным задачам. Дифференциальное уравнение колебаний мембраны имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p \frac{\partial z}{\partial y}\right) = q(x, y) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Если подставить в него

$$z = \varphi(x, y) \cos \sqrt{\lambda}\, t,$$

то мы получим для φ уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = -\lambda q \varphi.$$

Здесь и для амплитуды φ получается уравнение в частных производных. Математическая задача имеет совсем другой вид, чем для одномерной системы.

Интегральное уравнение задачи имеет вид

$$\varphi(x, y) = \lambda \iint G(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta)\, d\xi d\eta.$$

Интеграл здесь — двойной; функция Грина есть функция четырех переменных; но главные свойства интегральных уравнений не зависят от того, является ли интеграл простым, двойным, тройным и т. д. При любой кратности интеграла сохраняются одна и та же методика, одни и те же теоремы.

В случае мембраны разнообразие краевых условий гораздо больше, чем в случае одномерной системы, так как край мембраны может иметь произвольную форму и различного рода закрепление.

Мы видим, что физически близкие вопросы приводят к интегральным уравнениям аналогичного типа.

Третье преимущество интегральных уравнений заключается в том, что с их помощью ряд общих теорем (например, о разложимости по собственным функциям) доказывается проще и эле-

ментарнее, чем с помощью дифференциальных уравнений. Но как бы ни были хороши интегральные уравнения для решения общих вопросов, они мало пригодны для конкретных вычислений. Так обстоит дело в настоящее время, и вряд ли это положение изменится.

Существуют способы вычисления собственных значений и собственных функций путем последовательных приближений, причем за исходное приближение — и в этом вся соль — можно взять произвольную функцию. После третьего шага (вся работа занимает довольно короткое время) получается собственное значение с точностью порядка 1/1000. Я не могу сказать, насколько это не случайно.

К интегральным уравнениям приводит и ряд задач, относящихся к теории потенциала. Здесь имеются четыре основные задачи: внутренняя и внешняя задача Дирихле, внутренняя и внешняя задача Неймана. Возьмем в качестве примера внутреннюю задачу Дирихле.

В тех точках, где нет масс, потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{16}$$

Пусть внутри замкнутой поверхности S нет масс. Можно показать, что в этом случае распределение потенциала на поверхности S однозначно определяет потенциал во всех точках, находящихся внутри этой поверхности.

Доказательство однозначности строится так. Разность двух функций, принимающих в каждой точке поверхности S одни и те же заданные значения, равна нулю на этой поверхности; если функция равна нулю на поверхности S и внутри поверхности удовлетворяет уравнению (16), то она равна нулю всюду внутри S. Последнее следует из того, что линии потенциального вектора $\operatorname{grad}\varphi$ не могут быть замкнутыми, поэтому если нет источников (т. е. масс), то не может быть и поля.

Сформулируем теперь задачу Дирихле.

Пусть задано *произвольное* распределение потенциала φ на поверхности S. Существует ли непрерывная функция φ, удовлетворяющая внутри S уравнению Лапласа и принимающая на поверхности S заданные значения? Если такая функция существует, то согласно тому, что было уже сказано, эта

функция — единственная. Такова внутренняя задача Дирихле. [Внешняя задача получается, если мы зададимся функцией φ на поверхности S и будем искать функцию, удовлетворяющую уравнению (15) вне S и достаточно быстро стремящуюся к нулю в бесконечности].

Напишем формулу

$$\varphi_P = \oint_S u_{P'} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS, \tag{17}$$

где P — точка внутри S; P' — точка, принадлежащая S (рис. 187); u — некоторая вспомогательная функция. Формула (17) есть выражение для потенциала двойного слоя. Определяемая ею функция φ_P обладает замечательным свойством. Всюду внутри S она удовлетворяет уравнению Лапласа, а при подходе к самой поверхности стремится к некоторому пределу φ_i.

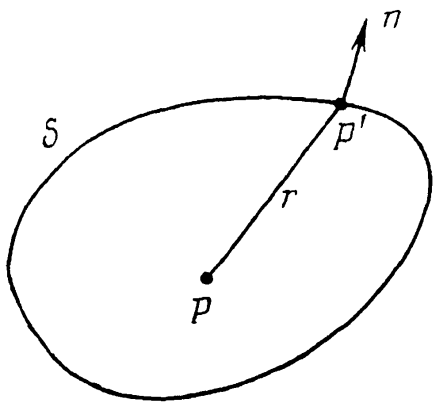


Рис. 187.

Если же мы сначала возьмем точку P на самой поверхности, то значение φ_P на поверхности связано с φ_i равенством:

$$\varphi_i = \varphi_P - 2\pi u_P.$$

(При переходе изнутри наружу 2π нужно заменить на 4π.) Если

$$\varphi_i = f(P),$$

то всюду на поверхности

$$\oint_S u_{P'} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) ds - 2\pi u_P = f(P). \tag{18}$$

Здесь u_P — неизвестная функция. Если удастся подобрать функцию u, удовлетворяющую уравнению (18), то она будет удовлетворять всем поставленным условиям: она будет решением нашей задачи.

Уравнение (18) есть неоднородное интегральное уравнение. Обычно перед интегралом мы пишем параметр λ. Вопрос сводится к тому, имеет ли интегральное уравнение

$$u_P = \frac{1}{2\pi} \oint_S u_{P'} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) ds - f(P) \tag{19}$$

решение при $\lambda = 1/2\pi$ и произвольной $f(P)$. Если да, то наша задача имеет решение.

Ядро нашего интегрального уравнения несимметрично.

Из теории интегральных уравнений известна следующая альтернатива. Если для данного значения параметра λ однородное уравнение, получающееся из (19) при $f(P) = 0$, не имеет (нетривиального) решения, то неоднородное уравнение (19) заведомо имеет решение. (В случае колебательных задач это означало, что если частота внешней силы не совпадает с собственной, то нет резонанса.)

Но мы знаем, что если потенциал на поверхности S равен нулю, то внутри S он тоже равен нулю. Это значит, что если

$$f(P) = 0,$$

то уравнение (19) имеет только тривиальное решение. Но отсюда следует, что неоднородное уравнение имеет решение при любом λ. Следовательно, задача Дирихле всегда имеет решение.

Таким образом, та же теорема, которая говорит о том, что в системе без трения при резонансе нет установившегося колебания, привела нас к решению задачи Дирихле. На этом примере видно, как ценен математический аппарат интегральных уравнений, хотя для чисто вычислительных целей он вряд ли может служить рабочим аппаратом.

Печатается по постановлению
редакционно-издательского совета
Академии Наук СССР

*

Редактор издательства *К. П. Гуров*
Технический редактор *Т. Ф. Соколова*
Переплет и титул художника
И. А. Литвишко

*

РИСО АН СССР № 5524. Сдано в набор
29/XI 1954 г. Подп. в печать 1/IV 1955 г.
Формат бум. 70×108$^{1}/_{16}$ Печ. лист. 31,5=43,1.
Уч.-изд. лист. 30,1. Тираж 2000. Т-02442.
Издат. № 907. Тип. зак. 1329.
Цена 23 р.
Издательство Академии Наук СССР
Москва, Подсосенский пер., 21.

1-я типография Издательства АН СССР
Ленинград, В. О., 9 линия, д. 12.

ОПЕЧАТКИ И ИСПРАВЛЕНИЯ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
103	6 св.	микроскопических	макроскопических
182	12 сн.	$(-mz_0)$	$(-m\ddot{z}_0)$
	9 св.	как	какие
308	5 св.	Правая	Первая
335	4 сн.	yk	y_k
335	3 сн.	$\frac{d^2yk}{dt^2}$	$\frac{d^2y_k}{dt^2}$
354	10 сн.	Электрические	Магнитные